

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICAS

**“SOLUCION AL PROBLEMA INVERSO
TOMOGRFIA COMPUTARIZADA,
TRATAMIENTO NUMERICO”**

TESIS

Para optar el título profesional de Licenciado en Matemáticas

AUTOR

Berta Loja Herrera

Lima – Perú

2009

SOLUCIÓN AL PROBLEMA INVERSO TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA TRATAMIENTO NUMÉRICO

Edwin Chávez Ramírez

Tesis presentada a condición del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobada por:


.....
Ph.D. Roxana López Cruz


.....
Dra. Nancy Rosa Moya Lázaro


.....
Dr. Efraín Carbajal Peña

Lima - Perú

Abril - 2009

FICHA CATALOGÁFICA

CHÁVEZ RAMÍREZ, EDWIN

Solución al Problema Inverso Tomografía Computarizada Tratamiento Numérico, (Lima) 2009.

XI, 102 p., 29.7 cm, (UNMSM, Licenciado, Matemáticas, 2009)

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemáticas.

I. UNMSM/FdeCM II. Título (Serie).

Dedicatoria

A quien me regaló la vida antes que yo imaginara qué significaba nacer, al Dueño de la inteligencia, la sabiduría, los dones y las virtudes, a quien me lleva grabado en las palmas de sus manos, al que me rescató; sí, a ti Dios Eterno, Luz que iluminas mi vida.

A esos dos seres que me aceptaron en sus vidas y me dejaron crecer, me alimentaron, me ayudaron en cada momento y me enseñaron a caminar en esta vida; sí, a mis padres: S. Ezequiel y María C.

Agradecimientos

Hay tantas personas a las que debo agradecer algo, que necesitaría varias páginas para poder citarlos. Nombres que en el pasado y en el presente me han apoyado, han confiado en mí, han sido un soporte, mis compañeros, mis amigos... Es tan importante tener alguien que te ayude a curar las heridas de las derrotas, así como también se alegre y comparta contigo las victorias. La mayoría de ellos pertenece al ámbito personal, pero sirvan estas líneas para agradecerles su presencia, aunque sea de forma conjunta, y para reconocer su influencia en lo que soy y en lo que hago.

Sin embargo no solo en mi entorno cercano aparecen personas de las que debo estar agradecido. A lo largo de mi vida me he cruzado con personas casi desconocidas, que en un momento oportuno me brindaron su ayuda de una u otra forma: una colaboración ocasional, un favor no pedido, una ayuda inesperada, una palabra de ánimo surgida de gente que Dios puso en mi camino con las que apenas mantengo o he mantenido relación. Es de justicia citarlos aquí. A toda esa gente que no he podido llegar a conocer con más profundidad, pero que ha alegrado mi vida, muchas gracias. Solo puedo decir que intentaré replicar su actitud para que se beneficien otros.

Por otro lado están aquellas personas que han colaborado de forma directa con el desarrollo de este trabajo y que me gustaría citar de forma personalizada, esta lista sería infinita, pero si me olvido de alguno, échenle la culpa a mi cabeza y no a mi corazón porque en él si están todos ustedes, a quienes les debo más de un GRACIAS por acompañarme a vivir.

A mis tutores Dr. Efraín Carbajal y Mg. Jorge Condado por mostrar confianza en mí y por darme la oportunidad de poder crecer bajo su tutoría.

Al Dr. Nicolas Valdivia, por su apoyo y conocimientos aportados hacia mi persona. También le agradezco su amistad, su amabilidad y por responder cada uno de los e-mails que le envié.

A la Ph.D. Roxana López, porque siempre supo darme una mano amiga, una ayuda o un consejo; sin embargo, más le agradezco su completa disposición que ha mostrado sin estar obligada a ello.

A la Dra. Nancy Moya, por el tiempo invertido en leer y corregir esta tesis.

A Ruth Mamani, por su paciencia, ayudándome con la corrección de redacción y ortografía.

También debo citar a mis compañeros de estudio: William Aguirre, Carlos Quispe, Elard Juárez, Liliana Jurado, César Molina, que siempre estuvieron dispuestos a ayudarme a despejar mis dudas.

A mis hermanos Geny, Robinsón y Edith, por regalarme más que cuatro paredes, pues me regalaron un hogar; también gracias por existir en la vida de mis padres y en la mía. Ana Pacahuala, por traer momentos de felicidad a mi vida, por sus consejos, por sus oraciones, gracias por todo.

Por último, pero no en último a los testigos de mis miserias y de mis grandezas, el apoyo y el soporte de mi vida; y por ende, de esta tesis, han sido mi familia y mis padres. Papá Ezequiel y Mamá María, gracias a los dos no solo por correr con la cuenta, sino también por todo el apoyo que me brindan y sobre todo por sus oraciones...

RESUMEN

SOLUCIÓN AL PROBLEMA INVERSO TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA TRATAMIENTO NUMÉRICO

EDWIN CHÁVEZ RAMÍREZ

ABRIL - 2009

Orientador: Dr. Efraín Carbajal Peña.
Título Obtenido: Licenciado en Matemáticas

Estudio breve sobre problemas mal condicionados y la Transformada de Radon. Obtención de la ecuación que gobierna la tomografía computarizada, estudio del mal condicionamiento del problema obtenido.

Métodos para resolver este problema mal condicionado; modelo de Shepp - Logan, elaboración de algunos didacticos, elaboración de programas y resultados de la ejecución computacional.

PALABRAS CLAVES: TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA
CT
PROBLEMAS INVERSOS
PROBLEMAS MAL CONDICIONADOS
TRANSFORMADA DE RADON

ABSTRACT

SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF COMPUTARIZED TOMOGRAPHY - NUMERICAL TREATMENT

EDWIN CHÁVEZ RAMÍREZ

APRIL - 2009

Advisor: Dr. Efraín Carbajal Peña.
Obtained Title: Licentiated in Mathematics

A brief study of bad conditioned problems and the Radon Transform. We get the equation that model computerized tomography and study the bad conditioned of the obtained problem.

Methods to solve this bad conditioned problem, Shepp-Logan model, elaboration of some didactical, elaboration of programs and results of the computational execution.

KEYWORDS : COMPUTARIZED TOMOGRAPHY
CT
INVERSE PROBLEMS
BAD CONDITIONED PROBLEMS
RADON TRANSFORM

Prólogo

La presente tesis pretende ser auto-contenida, en primer lugar diferenciamos un problema inverso de uno directo; luego, nos centramos en lo que es el problema de tomografía, damos la base matemática del por qué decimos que dicho problema es inverso, haciendo una revisión breve de la transformada de Radon, y su relación con los tipos de proyecciones.

El objetivo de la tomografía computarizada es reconstruir la parte interna de un objeto sin tener la necesidad de abrirlo, dicho procedimiento es conocido como ensayos no destructivos. Para lograr dicho propósito, la tomografía computarizada usa la atenuación que sufren los rayos X al atravesar por dicho objeto.

Matemáticamente hablando el problema al que nos enfrentamos es el de hallar una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ conociendo sus integrales de línea en todas las direcciones.

Como primera solución hacemos un estudio de la reconstrucción de la función f mediante la reconstrucción algebraica utilizando el método de Kaczmarz para solucionar el sistema de ecuaciones lineales.

Como una segunda solución, reconstruimos la función f utilizando la inversión de la transformada de Radon. Para dicha inversión utilizamos el teorema de la proyección de Fourier, o a veces llamado Slice Fourier Theorem. Además mostramos de manera gráfica la exactitud de esta reconstrucción.

Finalmente salimos de la teoría y nos centramos en la práctica mostrando de manera concreta cómo se reconstruye la función f para casos específicos. Pretendemos que la lectura sea auto-contenida, es por ello que adicionamos un apéndice con algunos hechos que creemos necesitamos recordar.

Sustentado, 24 de abril de 2009

Edwin Chávez Ramírez

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Problemas Directos y Problemas Inversos	4
1.2. La Transformada de Radon	7
1.2.1. La Transformada de Radon (\mathcal{RT}) en Coordenadas Polares	9
1.2.2. La \mathcal{RT} y la función delta de Dirac	15
1.2.3. Propiedades Básicas de la Transformada de Radon . . .	16
1.3. Proyecciones y las integrales de Línea	17
1.4. La inversión de \mathcal{RT}	20
2. Tomografía	22
2.1. La Tomografía y su desarrollo histórico	22
2.2. Planteamiento Matemático del Problema	25
2.3. Mal Condicionamiento	27
2.4. Mal condicionamiento de la Transformada de Radon	31
3. Métodos de Solución	34
3.1. Reconstrucción Algebraica	34
3.1.1. Dificultades en la Reconstrucción Algebraica	37
3.1.2. Solución Matemática	38
3.2. Método de Fourier	47

3.2.1. Método de la Transformada	47
3.2.2. Solución Matemática	50
3.2.3. Tratamiento Computacional	57
3.2.4. Ejemplo de Aplicación	60
4. Simulaciones	64
4.1. Tomografía simulada	64
4.2. Estructura interna de tubos	70
4.3. Conclusiones y Observaciones	76
Apéndice	77
A. Resultados Básicos de Análisis Funcional	77
A.1. Funciones y Operadores en Espacios Normados	77
A.2. Operadores Acotados y Operadores Compactos	78
A.3. Análisis de Fourier	80
A.3.1. El Espacio de Schwartz	80
A.3.2. Series de Fourier	80
A.3.3. La Transformada de Fourier	83
A.3.4. Transformadas de Fourier discreta y rápida.	85
A.4. Delta de Dirac - Nociones Básicas	90
B. Programas	95
B.1. Programas para la sección 3.2.4	95
B.2. Programas para el capítulo 4	96
B.2.1. Programas para tomografía simulada	96
B.2.2. Programas para la estructura interna de tubos	97
C. Tabla de Notaciones	101
Bibliografía	102

Introducción

La tomografía computarizada (CT) es uno de los grandes avances tecnológicos utilizados en medicina para el diagnóstico de enfermedades, sin embargo es también una técnica usada en varias otras áreas, tales como química aeroespacial, radioastronomía, etc. Básicamente en CT existen dos tipos de problemas diferentes que deben ser tratados. Uno de ellos es la adquisición de las proyecciones de un objeto por medio de dispositivos tales como una fuente de rayos X y detectores. El otro problema es la obtención de la imagen tomográfica a partir de sus proyecciones.

Fundamentalmente, la reconstrucción tomográfica trata de mostrar una imagen a partir de sus proyecciones.

Básicamente, una proyección en un ángulo dado es un conjunto de integrales de línea en dicha dirección. La figura 1 ilustra dos proyecciones obtenidas de un objeto constituido de un par de cilindros (o círculos en dos dimensiones).

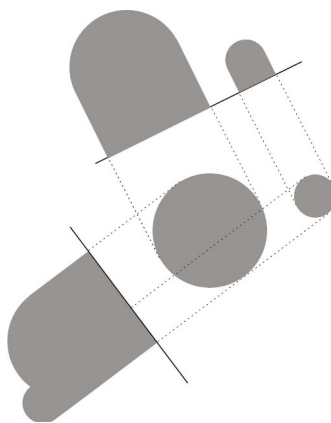


Figura 1: Obtención de Proyecciones.

La solución matemática para el problema de la reconstrucción fue descubierta en 1917 por el matemático Johann Radon. El problema es hallar la fórmula para la inversa de la transformada de Radon. La dificultad con la fórmula de inversión de Radon es que no nos proporciona un algoritmo que pueda ser implementado en computadoras.

Todos los métodos de reconstrucción son implementaciones para calcular una

fórmula para la inversa de Radon. Estos métodos pueden ser divididos en dos grupos principales: algoritmos algebraicos y algoritmos de transformadas. Veamos una definición general de estos métodos

- i) Los métodos algébricos son también conocidos como métodos iterativos. La solución es obtenida a partir de una aproximación inicial y el cálculo es realizado iterativamente hasta obtener la precisión deseada. Empero estos métodos son conceptualmente más simples que los métodos de transformada, este hecho es el que lo hace menos eficiente desde el punto de vista computacional.
- ii) Los métodos de transformadas proporcionan una solución para el problema de la inversión de la transformada de Radon basada en el teorema de la proyección (Fourier Slice Theorem). Ejemplos de estos métodos: método de la Retroproyección filtrada o el método de Fourier directo, el método del sinograma.

Esta tesis pretende ser auto-contenida. Se asumirá algunos hechos del análisis real, álgebra lineal y un poco de análisis funcional; sin embargo, algunos de los resultados más importantes serán dados en el Apéndice A. También se asumirá algunas familiaridades con la programación en Matlab, pues todos los cálculos y las representaciones gráficas se hacen con dicho programa, figurado en el Apéndice B, toda la codificación usada. sta tesis está organizada como sigue.

- En el capítulo 1 se presenta la noción de problema inverso y la diferencia que existe con un problema directo. El objetivo, mostrar que la CT es un problema inverso. Además en este capítulo se hace un estudio de la transformada de Radon¹, también se dá a conocer los distintos tipos de proyecciones que se pueden hacer a un objeto. Finalmente, se menciona la fórmula de inversión para la transformada de Radon.
- En el capítulo 2 se presenta un resumen histórico de la tomografía, así como el planteamiento matemático y se prueba que es un problema inverso.
- El capítulo 3 está dividido en dos secciones, en la primera veremos un método sencillo para el problema inverso de tomografía llamado de **re-construcción algebraica**, donde ponemos de manifiesto las dificultades que se encuentran y por supuesto, la solución matemática que involucra el método de Kaczmarz.

En la siguiente sección se presenta otro método para el problema inverso de tomografía basado en la transformada de Fourier; este método es más eficiente y más reciente. Actualmente es empleado cuando se realiza una TAC (tomografía axial computarizada). Aquí damos la solución

¹Para el caso bidimensional

matemática del problema (theorem Fourier slice) y el tratamiento computacional. Adicionalmente hacemos referencia al modelo presentado por Shepp-Logan, para hacer notar la exactitud de este método.

- En el capítulo 4 realizamos dos experimentos, en donde se manifiesta lo descrito en el capítulo 3, además la experimentación es un trabajo necesario y conveniente para verificar posibles errores. Concluimos éste capítulo dando conclusiones y las observaciones a las que arribamos luego de la investigación.

Detrás de toda esa Tecnología que nos rodea, ocultos para la mayoría de los espectadores, están los modelos matemáticos. Nunca como ahora han sido las Matemáticas tan útiles, aunque la utilidad no sea usada esencialmente en ella misma. Rechazar la Tecnología implica excluirse de la sociedad y civilización actual, y rechazar las Matemáticas es perder la esperanza de comprender y crear la Tecnología.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Problemas Directos y Problemas Inversos

Es sabido que investigar es trabajar con problemas de algún tipo, esto sugiere que el concepto de problema es central en el desarrollo del conocimiento.

Los problemas inversos son ubicuos y son los más difíciles e interesantes. Esto se debe a que o bien tienen soluciones múltiples, o bien son insolubles.

Piense por ejemplo en el diagnóstico de una enfermedad a partir de sus síntomas, o en reconstruir un suceso pasado a partir de las huellas que ha dejado en el presente; o el de diseñar un artefacto que desempeñe ciertas funciones; o en trazar un plan para alcanzar ciertos objetivos. Todos estos problemas tienen en algunos casos varias soluciones, y en otros casos, ninguna solución.

Lo mismo se aplica a adivinar las intenciones de una persona a partir de su comportamiento; o de tratar de descubrir los autores de un crimen conociendo sus víctimas y la escena del crimen; o el de identificar las premisas de un argumento dadas algunas de sus conclusiones.

La dificultad de los problemas inversos es de gran interés teórico porque se refiere a las investigaciones más difíciles en todos los campos. Su interés práctico radica en esto: si advertimos que el problema que nos interesa es inverso, no buscaremos recetas (por ejemplo algoritmos) para resolverlo ni esperaremos con resolverlo en un plazo breve.

La solución de un problema directo, tal como hallar las raíces de una ecuación algebraica, o de predecir los efectos de una acción, involucra análisis y razonamiento progresivo, de premisas a conclusiones o de causas a efectos.

En cambio, la solución de un problema inverso involucra síntesis y razonamiento regresivo, es decir, ir de las conclusiones a las premisas o de los efectos a las causas.

¿Cómo distinguimos un problema inverso de uno directo?

No existe una definición ni un criterio general, preciso y aceptado. Lo que se emplea, en diversos campos de investigación son las reglas siguientes:

1. Matemáticas

Todos los problemas solubles con ayuda de técnicas (en particular algoritmos) bien definidos son problemas directos, en tanto que el proceso inverso, de recuperar tales problemas a partir de sus soluciones, es inverso.

Por ejemplo, el problema de sumar dos números dados es directo, mientras que el de descomponer un número entero en una suma de sus dígitos es inverso. Otro ejemplo: el problema de calcular las ganancias de un capital invertido a un interés dado, después de un número de años, es directo. En cambio, el problema de calcular tanto el número de años como la tasa de interés necesarios para acumular el capital deseado, es indirecto y tiene muchas soluciones.

2. Ciencias Naturales y Sociales

Los problemas inversos son de la forma: de efecto a causa o de propiedad a objeto o cosa, o de macronivel a micronivel.

Por ejemplo: Anticipar los estragos de una enfermedad dada, es un problema directo. Mientras que conjeturar una enfermedad a partir de sus síntomas es un problema inverso.

3. Técnica

Los problemas inversos son de la forma: de función a mecanismo, o de disfunción a desperfecto en el mecanismo.

Por ejemplo: Calcular lo que va a durar un proceso industrial conocido, es un problema directo, mientras que diseñar un proceso que insuma un tiempo dado es un problema inverso.

Desde el punto de vista estrictamente matemático la clasificación de un problema como directo o inverso es irrelevante, si se tiene en cuenta la dualidad $(\mathcal{K}^{-1})^{-1} = \mathcal{K}$. En algunos problemas tal clasificación toma en cuenta la causalidad: el problema directo caracteriza el efecto y determinar la causa es dominio del problema inverso. En otros casos esta clasificación está más ligada a la historia de la deducción y los primeros estudios del modelo matemático.

Estudiar un problema inverso consiste esencialmente en analizar un operador en un espacio de funciones: caracterizar su dominio y contra—dominio; deducir si es invertible o no, o en qué subdominios es posible invertirlo; observar cómo mapea determinados conjuntos, obtener información acerca de su continuidad y regularidad sobre diferentes conjuntos.

Para fijar mejor las ideas, supongamos que tenemos un modelo matemático de un proceso físico.

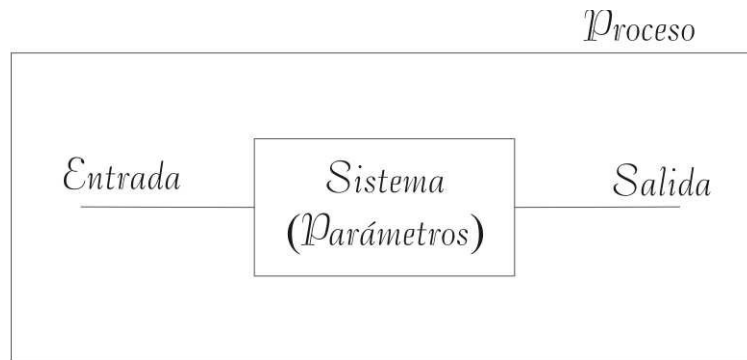


Figura 1.1: Proceso

El análisis del problema físico considerado via el modelaje matemático puede separarse en tres tipos diferentes de problemas:

1. El Problema Directo:
Dados los datos de entrada y los parámetros del sistema, hallar los datos de salida del modelo.
2. El problema de Reconstrucción:
Dados los parámetros del sistema y los datos de salida, hallar los datos de entrada, con los que fueron obtenidos estos resultados.
3. El problema de Identificación:
Dados los datos de entrada y los datos de salida determinar los parámetros del sistema que hagan posible la concordancia entre estos datos.

Llamaremos a los problemas del tipo 1. problema directo, puesto que tienen una orientación de causa—efecto. En este sentido los problemas del tipo 2. y 3. se llamarán problemas inversos, puesto que son problemas que consisten en hallar causas desconocidas de efectos conocidos. Es claro que la solución de uno de los problemas mencionados implica el tratamiento de los otros.

En términos analítico—funcionales de descripción matemática de los datos de entrada y salida y los parámetros del sistema serán:

- \mathcal{X} espacio de los datos de entrada.
- \mathcal{Y} espacio de los datos de salida.
- P espacio de los parámetros del sistema.
- $\mathcal{K}(p)$ sistema de operadores de \mathcal{X} en \mathcal{Y} asociado a p

En estos términos podemos reformular los problemas anteriores de la siguiente forma:

1. Dados $x \in \mathcal{X}$ y $p \in P$, hallar $y = \mathcal{K}(p)x$.
2. Dados $y \in \mathcal{Y}$ y $p \in P$, resolver la ecuación $\mathcal{K}x = y$, $x \in \mathcal{X}$.
3. Dado $y \in \mathcal{Y}$ y $x \in \mathcal{X}$, hallar $p \in P$ tal que $\mathcal{K}(p)x = y$.

En ciertos casos simples los problemas inversos pueden ser convertidos en problemas directos. Por ejemplo, si \mathcal{K} tiene una inversa conocida, el problema de reconstrucción se resuelve por $x = \mathcal{K}^{-1}y$. Sin embargo, la determinación explícita de la inversa no ayuda si los datos de salida y ; no pertenecen al dominio de la definición de \mathcal{K}^{-1} . Esto es una situación típica en las aplicaciones, dado el hecho de que los datos de salida son conocidos en forma imprecisa o están distorsionados.

1.2. La Transformada de Radon

En esta parte estudiaremos la Transformada de Radon solo para el caso bidimensional, para el caso n -dimensional recomendamos ver el cap. II de [Na]

En 1917, Johann Radon definió la siguiente aplicación.

Definición 1.1. (Transformada de Radon)

Dada una función continua en el plano \mathbb{R}^2 y de soporte compacto (esto es, existe $C > 0$ tal que $f(x, y) = 0$ para $|(x, y)| > C$) y un vector $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^2$ con $|\vec{\omega}| = 1$ que forma un ángulo θ con el eje horizontal; la integral de línea de la función f a lo largo de la recta $l(\theta, s)$ que es perpendicular a $\vec{\omega}$; y que está a una distancia s del origen, ver figura 1.2, será denotado por

$$(1.1) \quad \mathcal{R}f(s, \theta) = \int_{L(\theta, s)} f(x, y) dL, \quad s \in \mathbb{R}, |\omega| = 1$$

Donde estamos identificando el vector $\vec{\omega}$ con el ángulo que lo determina. Es por ello que en la notación $\mathcal{R}f(s, \theta)$ expresamos θ en vez de $\vec{\omega}$. ($\theta \in [0, 2\pi)$).

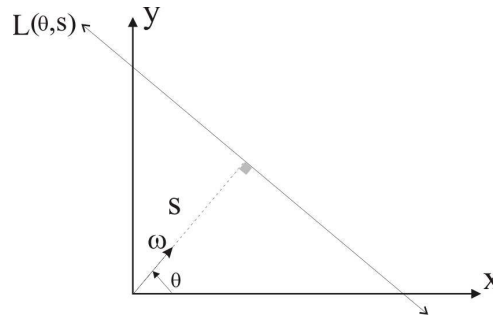


Figura 1.2: $l(\theta, s) = \{z = (x, y) : (z, \omega) = s\}$

El operador definido en (1.1), es una aplicación continua, que lleva funciones de (x, y) en funciones de (s, θ) . Más específicamente tenemos

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{R} : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) &\rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R} \times S^1) \\ f &\rightarrow \mathcal{R}f \end{aligned}$$

lleva una función C^∞ de soporte compacto en \mathbb{R}^2 en una función C^∞ de soporte compacto en $\mathbb{R} \times S^1$.

Básicamente una operación de transformación convierte una expresión matemática definida en un sistema de coordenadas para otro sistema de coordenadas diferentes. Cuando las coordenadas son diferentes, el espacio definido por el sistema de coordenadas es también diferente. En caso de la transformada de Radon, ella transforma las coordenadas de un dominio espacial en un dominio de Radon, como se ilustra en la figura 1.3

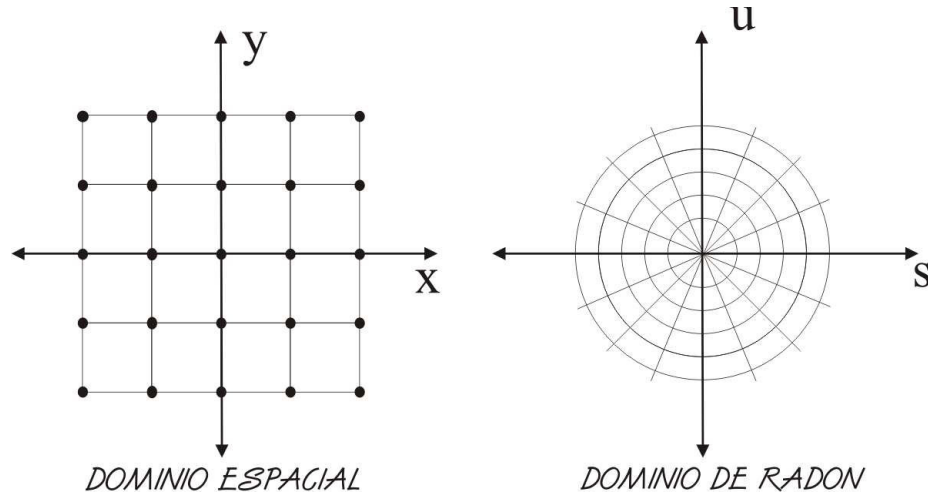


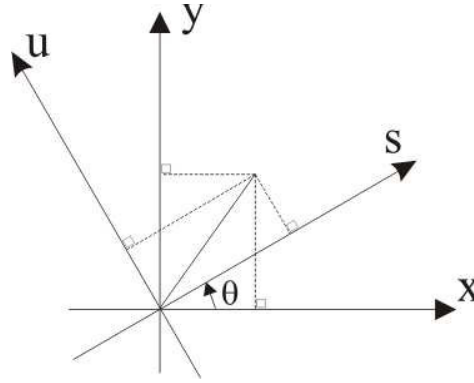
Figura 1.3: Transformada de Radon

Una integral de línea, como su propio nombre lo indica, representa la integral de alguna función escalar (parámetro de un objeto) a lo largo de una línea. Un ejemplo típico es la atenuación de rayos X cuando se propagan a través del tejido biológico. En este caso, el objeto es modelado como una distribución bidimensional de atenuación constante de rayos X y la integral de línea representa la atenuación total sufrida por el manojó de rayos X a medida que ellos pasan en línea recta a través del objeto.

Como la transformada de Radon transforma un sistema de coordenadas (x, y) en otro, consideremos un nuevo sistema de coordenadas (s, u) que se han obtenido de rotar el sistema anterior un ángulo θ como se muestra en la figura 1.4

El sistema de coordenadas (s, u) de la figura 1.4 corresponde a la rotación de un ángulo θ alrededor del origen.[La]

$$(1.3) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix}$$

Figura 1.4: Rotación de los ejes en un ángulo θ

Y asumiendo que f tiene soporte compacto, podemos reescribir (1.1) como:
(1.4)

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \int_{L(\theta, s)} f(x, y) dL = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du$$

1.2.1. La Transformada de Radon (\mathcal{RT}) en Coordenadas Polares

Si la imagen de la función $f(x, y)$ viene dada en forma polar como

$$g(r, \theta) = f_p(x, y),$$

entonces:

$$(1.5) \quad \mathcal{R}g(s, \theta) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{s^2 + u^2}, \theta + \arctan(\frac{u}{s})) du, & \text{si } s \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(u, \theta + \frac{\pi}{2}) du, & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

Ejemplos

He aquí algunos ejemplos que ilustran las anteriores definiciones:

Ejemplo 1.1. Calcular la Transformada de Radon (\mathcal{RT}) de la función

$$f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

Solución. La función anterior en su forma polar es: $g(r, \theta) = e^{-r^2}$

luego su \mathcal{RT} es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}g(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\sqrt{s^2 + u^2}, \theta + \arctan\left(\frac{u}{s}\right)\right) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2 + u^2)} du \\
 &= e^{-s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \\
 &= \pi^{1/2} e^{-s^2}
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2. Calcular la Transformada de Radon de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 - x^2 - y^2)^{\alpha-1}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución. La forma polar de esta imagen, es:

$$g(s, \theta) = \begin{cases} (1 - s^2)^{\alpha-1}, & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado que la imagen vale cero fuera del disco unidad, $\mathcal{R}g(s, \theta) = 0$ para $s > 1$. En el resto de los casos, la imagen es radial, así que la integral a lo largo de una recta L será independiente del ángulo θ . Por ello, integramos a lo largo de la línea horizontal $\theta = \pi/2$. Usando la definición original de la \mathcal{RT} (la no polar ecuación. (1.4)), obtenemos para $p \leq 1$ y para cualquier ángulo θ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}f(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \\
 &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} (1 - (s \cos \theta - u \sin \theta)^2 - (s \sin \theta + u \cos \theta)^2)^{\alpha-1} du \\
 &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} (1 - s^2 - u^2)^{\alpha-1} du
 \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = (1 - s^2)^{1/2}z$, $\Rightarrow du = (1 - s^2)^{1/2}dz$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}f(s, \theta) &= \int_{-1}^1 (1 - s^2 - z^2(1 - s^2))^{\alpha-1} (1 - s^2)^{1/2} dz \\
 &= \int_{-1}^1 ((1 - s^2)(1 - z^2))^{\alpha-1} (1 - s^2)^{1/2} dz \\
 &= (1 - s^2)^{\alpha-1/2} \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{\alpha-1} dz \\
 &= (1 - s^2)^{\alpha-1/2} \int_{-1}^1 (1 - z)^{\alpha-1} (1 + z)^{\alpha-1} dz
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = (1 - s^2)^{\alpha-1/2} \int_{-1}^1 (1 - z)^{\alpha-1} (1 + z)^{\alpha-1} dz$$

luego hacemos el cambio de variable $z = 2t - 1$ entonces $dz = 2dt$ y los límites de integración ahora serán de 0 a 1, entonces la última integral se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(s, \theta) &= (1 - s^2)^{\alpha-1/2} \int_{-1}^1 (1 - z)^{\alpha-1} (1 + z)^{\alpha-1} dz \\ &= (1 - s^2)^{\alpha-1/2} \int_0^1 (2 - 2t)^{\alpha-1} (2t)^{\alpha-1} 2dt \\ &= 2^{2\alpha-1} (1 - s^2)^{\alpha-1/2} \int_0^1 (1 - t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} dt \\ &= 2^{2\alpha-1} (1 - s^2)^{\alpha-1/2} B(\alpha, \alpha) \\ &= 2^{2\alpha-1} (1 - s^2)^{\alpha-1/2} \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \begin{cases} 2^{2\alpha-1} (1 - s^2)^{\alpha-1/2} \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}, & \text{si, } 0 \leq s \leq 1, \forall \theta. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

En los siguientes ejemplos se calculará la transformada de Radon analítica de dos figuras primitivas: círculo unitario y el cuadrado.

Ejemplo 1.3. *Calcular la \mathcal{RT} de un círculo unitario*

Solución. Un círculo unitario es definido como

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si, } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Puesto que en el círculo unitario la función es constante, la integral a lo largo de cualquier línea es simplemente la longitud de la intersección de la línea con la región de soporte del círculo. Así, $\mathcal{R}f(s, \theta) = 0$ para $s > 1$. Los otros valores pueden obtenerse con la ayuda de la figura: 1.5

De esta figura se desprende que $\mathcal{R}f(s, \theta) = 2(1 - s^2)^{1/2}$ para $0 \leq s \leq 1$ (0 para el resto de valores).

□

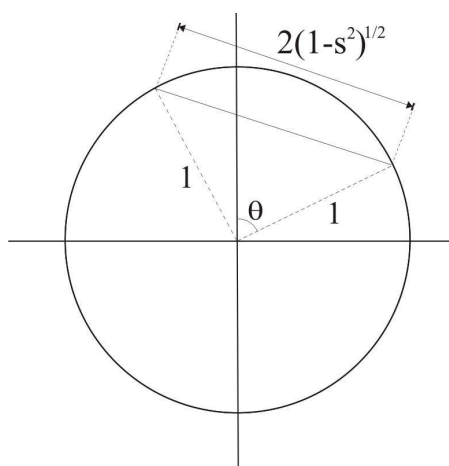


Figura 1.5: Evaluación de la \mathcal{RT} para una imagen con soporte circular.

Ejemplo 1.4. (Cuadrado)

Calcular la \mathcal{RT} de un cuadrado de lado 1. Con $f(x, y) = \chi_Q(x, y)$, donde χ la función característica y Q el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ (primer cuadrante).

Solución. Como $f(x, y) = 1$ en el dominio de f , entonces $\mathcal{R}f(s, \theta)$ es la longitud de la intersección de la recta L determinada por s y θ con Q .

Hay que tener en cuenta que una recta puede intersectar con 2 de los 4 lados de Q de 6 maneras. Estas están reflejadas a continuación, (ver Fig.1.6)

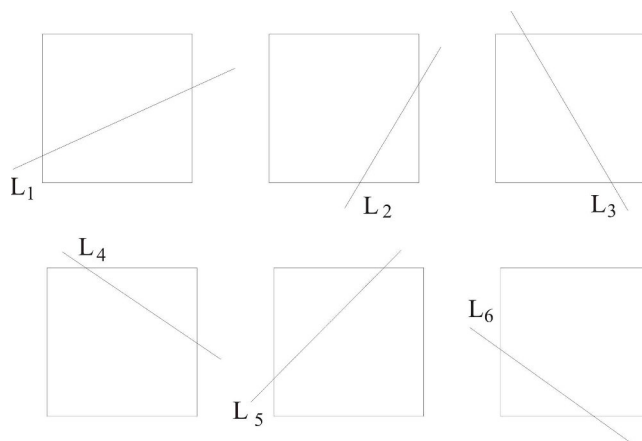


Figura 1.6: Las seis posibles formas en que una recta puede cortar a dos lados de un cuadrado.

Para calcular $\mathcal{R}f(s, \theta)$, es conveniente dividir el intervalo $[0, 2\pi]$ en 8 intervalos, entonces tenemos que hacer 8 pasos, cada uno de ellos en una región de θ° (cada 45°)

$$\frac{(n-1)\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{n\pi}{4}$$

Paso 1 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$)

Consideremos una línea del tipo L_6 . Calculemos su longitud dentro de Q

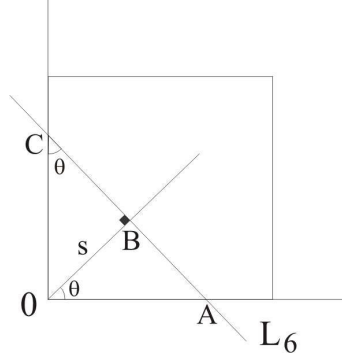


Figura 1.7: *Evaluación de la \mathcal{RT} sobre L_6 .*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}f(s, \theta) &= \overline{CB} + \overline{BA} \\
 &= \overline{OC} \cos \theta + \overline{OA} \sin \theta \\
 &= \frac{s}{\sin \theta} \cos \theta + \frac{s}{\cos \theta} \sin \theta \\
 &= \frac{s}{\sin \theta \cos \theta}
 \end{aligned}$$

Ahora calculemos la longitud de la línea L_3 , ver Fig: 1.8

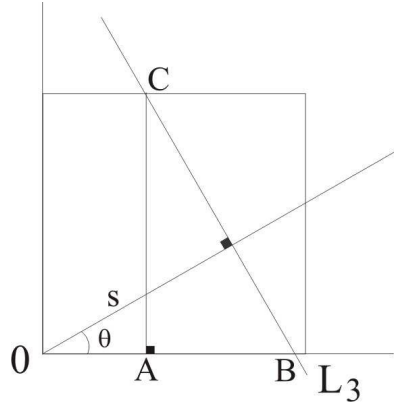
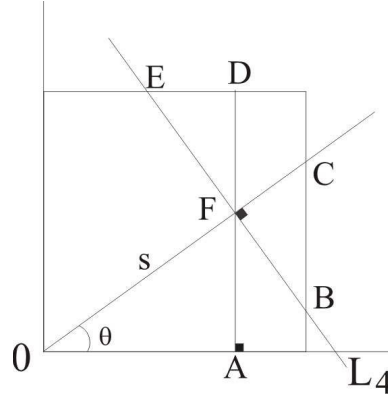


Figura 1.8: *Evaluación de la \mathcal{RT} sobre L_3 .*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}f(s, \theta) &= \overline{BC} \\
 &= \frac{\overline{AC}}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta}
 \end{aligned}$$

Consideremos ahora la línea L_4 , ver Fig: 1.9 Hallemos \overline{FE}

Figura 1.9: Evaluación de la \mathcal{RT} sobre L_4 .

$$\begin{aligned}
 \overline{FE} &= \frac{\overline{FD}}{\cos \theta} \\
 (1.6) \quad &= \frac{1 - \overline{FA}}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1 - s \sin \theta}{\cos \theta}
 \end{aligned}$$

Hallemos \overline{FC}

$$(1.7) \quad \overline{FC} = \frac{1 - s \cos \theta}{\cos \theta}$$

Hallemos \overline{FB}

$$\begin{aligned}
 \overline{FB} &= \overline{BC} \cos \theta \\
 (1.8) \quad &= \frac{\overline{FC}}{\sin \theta} \cos \theta \\
 &= \frac{1 - s \cos \theta}{\sin \theta}
 \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}f(s, \theta) &= \overline{FE} + \overline{FB} \\
 (1.9) \quad &= \frac{1 - s \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1 - s \cos \theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{\cos \theta + \sin \theta - s}{\sin \theta \cos \theta}
 \end{aligned}$$

La línea L_6 se mantiene para $0 \leq s \leq \sin \theta$, la línea L_3 se mantiene, para $\cos \theta \leq s \leq \sin \theta + \cos \theta$, y $\mathcal{R}f(s, \theta) = 0$ para cuando $s > \sin \theta + \cos \theta$.

Paso 2 ($\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

Las posibilidades, en este caso, son las siguientes: Líneas L_4 , L_1 y L_6 . Por ejemplo, para L_4 , se tiene que:

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \frac{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta - s}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta} \quad \operatorname{sen} \theta \leq s \leq \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$$

De manera similar se hacen los cálculos para las líneas L_1 y L_2 , obteniendo Para L_1 :

$$(1.10) \quad \mathcal{R}f(s, \theta) = \csc \theta, \quad \cos \theta \leq s \leq \operatorname{sen} \theta$$

Para L_6 :

$$(1.11) \quad \mathcal{R}f(s, \theta) = \frac{s}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta}, \quad 0 \leq s \leq \cos \theta$$

Por último si $s \geq \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$, entonces $\mathcal{R}f(s, \theta) = 0$.

Pasos 3 al 8

Los pasos restantes se calculan de manera similar, a continuación mostramos dichos resultados en el cuadro 3.1.

Pasos restantes	Rangos	Evaluación de la \mathcal{RT} sobre las líneas
Nº 3	$\pi/2 \leq \theta < 3\pi/4$	L_5 y L_1
Nº 4	$3\pi/4 \leq \theta < \pi$	L_5
Nº 5	$\pi \leq \theta < 5\pi/4$	—
Nº 6	$5\pi/4 \leq \theta < 3\pi/2$	—
Nº 7	$3\pi/2 \leq \theta < 7\pi/4$	L_2
Nº 8	$7\pi/4 \leq \theta < 2\pi$	L_2 y L_3

Cuadro 1.1:

Por tanto, con este ejemplo hemos visto que son necesarios 8 pasos para evaluar la \mathcal{RT} para una imagen con región de soporte cuadrada.

□

1.2.2. La \mathcal{RT} y la función delta de Dirac

Existe una definición equivalente usando la función delta de Dirac, definida en A.4 del Apéndice, entonces la ecuación (1.1) se puede escribir como:

$$(1.12) \quad \mathcal{R}f(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta - s) dx dy$$

Nosotros también escribiremos:

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \mathcal{R}_{\theta}f(s)$$

En nuestro caso, la integral de línea representa la atenuación total sufrida por el manojito de rayos X a medida que ellos pasan en línea recta a través del objeto.

1.2.3. Propiedades Básicas de la Transformada de Radon

En esta sección se muestran algunas propiedades fundamentales de la transformada de Radon que son derivadas a partir de la ecuación (1.12). El procedimiento para la deducción de las propiedades de linealidad, desplazamiento y la rotación se demuestran a continuación. Para las demás propiedades, se pueden aplicar procedimientos análogos.

1. Linealidad:

$$(1.13) \quad \mathcal{R}(f_1 + f_2)(s, \theta) = \mathcal{R}f_1(s, \theta) + \mathcal{R}f_2(s, \theta)$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f_1 + f_2)(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x, y) + f_2(x, y)) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ &= \mathcal{R}f_1(s, \theta) + \mathcal{R}f_2(s, \theta) \end{aligned}$$

2. Desplazamiento:

Asumiendo que la función $f(x, y)$ es desplazada, es decir:

$$h(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$$

Entonces

$$(1.14) \quad \mathcal{R}h(s, \theta) = \mathcal{R}f(s - s_0, \theta) \text{ donde } s_0 = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{R}h(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0, y - y_0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ \text{sea: } w &= x - x_0, \quad z = y - y_0 \Rightarrow dx = dw, \quad dz = dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta((w + x_0) \cos \theta + (z + y_0) \sin \theta - s) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta(w \cos \theta + z \sin \theta - (s - x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta(w \cos \theta + z \sin \theta - (s - s_0)) dx dy \\ &= \mathcal{R}f(s - s_0, \theta) \end{aligned}$$

Se puede ver de esta propiedad que solo la coordenada s es movida.

3. Rotación:

Expresando $f(x, y)$ en forma polar, es decir, $f(x, y) = f_p(r, \phi)$, si hacemos una rotación ϕ_0 , es decir, sea $h(r, \phi) = f(r, \phi - \phi_0)$

Entonces

$$(1.15) \quad \mathcal{R}h(s, \theta) = \mathcal{R}f(s, \theta - \phi_0)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{R}h(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} h(r, \phi) \delta(r \cos \phi \cos \theta + r \sin \phi \sin \theta - s) |r| d\phi dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} f(r, \phi - \phi_0) \delta(r \cos(\phi - \theta) - s) |r| d\phi dr \\ \text{sea } \alpha &= \phi - \phi_0 \Rightarrow d\alpha = d\phi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} f(r, \alpha) \delta(r \cos(\alpha - (\phi - \phi_0)) - s) |r| d\alpha dr \\ &= \mathcal{R}f(s, \theta - \phi_0) \end{aligned}$$

Otras Propiedades

El cuadro (3.2.) muestra otras propiedades de la Transformada de Radon.

Propiedades	Función	Transformada de Radon
Simetría	$f(x, y)$	$\mathcal{R}f(s, \theta) = \mathcal{R}f(-s, \theta \pm \pi)$
Escalamiento	$f(ax, ay)$	$\frac{1}{ a } \mathcal{R}f(as, \theta)$
Conservación de masa	$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$	$M = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(s, \theta) ds$
Limitación de espacio	$f(x, y) = 0$ si $ x > \frac{D}{2}, \left \frac{D}{2} \right $	$\mathcal{R}f(s, \theta) = 0$, si $ s > \frac{D\sqrt{2}}{2}$

Cuadro 1.2:

1.3. Proyecciones y las integrales de Línea

Una proyección está formada por la combinación de un conjunto de integrales de línea. Existen tres tipos de proyecciones: proyecciones paralelas (o proyecciones de eje paralelo), proyecciones de manojo en abanico (“Fan beam”) y proyecciones de manojo en cono.

Más específicamente una proyección paralela se define:

Definición 1.2. (Proyección paralela)

Sea $\omega \in S^1$ y sea $x \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$(1.16) \quad \mathcal{P}f(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\omega) dt$$

Esta es la integral de f sobre la línea recta que pasa por el punto x y tiene la dirección ω . Obviamente $\mathcal{P}f(\omega, x)$ no se altera si movemos el punto x en la dirección de ω . También se suele escribir

$$\mathcal{P}f(\omega, x) = \mathcal{P}_\theta f(x)$$

Para nuestro caso en el que estamos trabajando en dos dimensiones la proyección paralela \mathcal{P} y la transformada de Radon \mathcal{R} coinciden. Este tipo de proyección es la más simple pues es una colección de integrales de los rayos paralelos para un ángulo θ constante, conforme se ilustra en la figura 1.10.

En el caso de un tomógrafo, las proyecciones pueden ser obtenidas moviéndose una fuente de rayos X y los detectores en lados opuestos con los ejes de rayos paralelos atravesando el objeto.

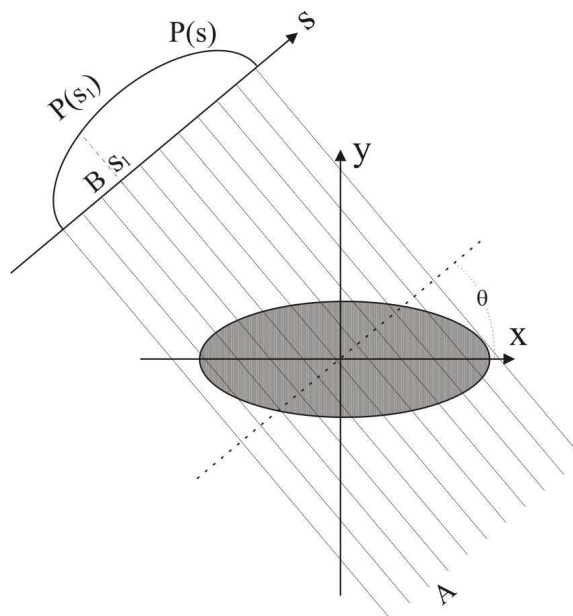


Figura 1.10: Proyección paralela.

La cantidad $\mathcal{R}f(s, \theta)$ es llamada también como suma de rayos, desde que ella representa una sumatoria de $f(x, y)$ a lo largo de un rayo a una distancia s en un ángulo θ . Se puede verificar que (s, θ) no son las coordenadas polares de (x, y) .

La figura 1.10 también muestra la representación de la sección transversal de un objeto siendo atravesada por un manojo de rayos X paralelos (todos los

rayos del manojo son paralelos). La parte superior de la figura representa la proyección de los coeficientes de atenuación de la sección transversal en función de la coordenada s .

La amplitud de la curva para un determinado valor $s = s_1$ en función de los coeficientes de atenuación a lo largo del camino AB está representado por $P(s_1)$. La curva $P(t)$ contiene la información externa necesaria para la reconstrucción de una sección transversal.

Definición 1.3. (Proyección divergente)

Los rayos divergentes (en dos dimensiones en forma de abanico “fan-beam”), se define como: Dado $a \in \mathbb{R}^2$ y una dirección $\omega \in S^1$

$$(1.17) \quad \mathcal{D}f(\omega, a) = \int_0^\infty f(a + t\omega) dt$$

Esta es la integral de f a lo largo de la mitad de la línea con punto de partida a y en la dirección ω . También se suele escribir

$$\mathcal{D}f(\omega, a) = \mathcal{D}_a f(\omega)$$

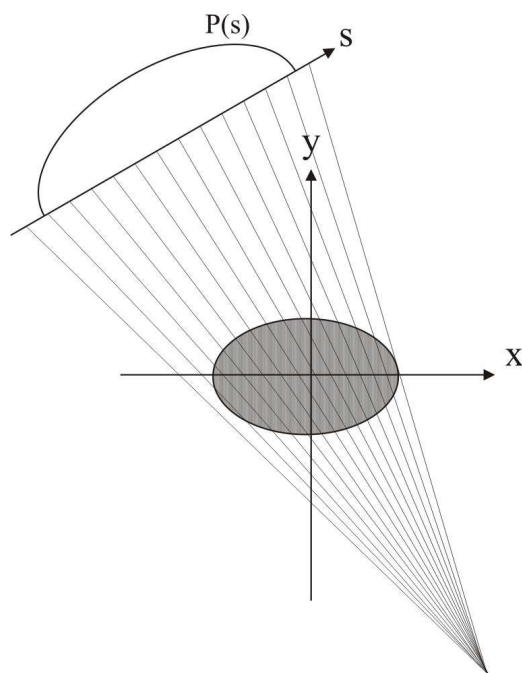


Figura 1.11: Proyección abanico (“Fan beam”).

En este tipo de proyección la fuente es colocada en una posición fija relativa a una línea de detectores como se ilustra en la figura 1.11.

Esta proyección es conocida como **proyección abanico** (“Fan beam”). En este tipo de proyección, todos los rayos tienen como origen un único punto (fuente) y se abren en forma de un abanico.

Definición 1.4. (Proyección de manojo en cono)

Una proyección de manojo en cono se ilustra en la figura 1.12. En este caso, varios manojos en forma de abanico emergen de la fuente, atravesando el objeto en diversas alturas necesitando para esto contar con detector planar.

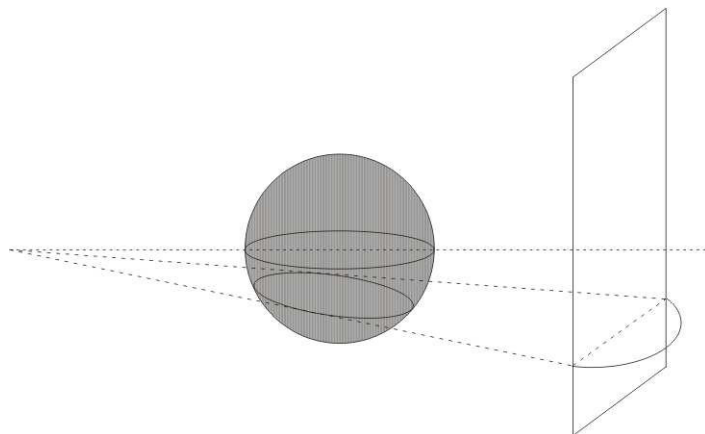


Figura 1.12: Proyección de manojo en cono.

Mencionamos que nosotros trabajaremos con proyecciones paralelas, y para no desviarnos de nuestro objetivo, es decir el problema matemático al que nos enfrentamos es hallar una función conociendo sus integrales de línea en todas las direcciones. Con la notación anterior, lo que buscamos es una formula, que nos permita recuperar f a partir de $\mathcal{R}f$, para ello regresemos a darle una ojeada a la figura 1.2 y vamos a parametrizar la recta l , entonces tenemos:

$$\begin{cases} x = s \cos \theta - u \sin \theta \\ y = s \sin \theta + u \cos \theta \end{cases} \text{ para } u \in \mathbb{R}.$$

Luego, asumiendo que f tiene soporte compacto podemos reescribir la ecuación (1.1) como:

$$(1.18) \quad \mathcal{R}f(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du$$

1.4. La inversión de \mathcal{RT}

El propósito de esta parte es mostrar cómo puede usarse la transformada de Fourier en la inversión de la \mathcal{RT} . Además esta forma de invertir la transformada de Radon permite la creación de imágenes a partir de proyecciones.

La metodología se basa en que podemos reconstruir una fórmula de inversión para la transformada de Radon usando tanto la transformada de Fourier unidimensional y bidimensional.

Más específicamente tenemos el siguiente teorema. (Para más detalles de este teorema y la reconstrucción de imágenes por medio de proyecciones ver la sección 3.2)

Teorema 1.1. (Repetido después como Teorema 3.2.)

Sea $\mathcal{P}_\theta f(s)$ la integral de línea de f sobre la recta $L_{(\theta,s)}$ con la parametrización $x \cos \theta + y \sin \theta = s$, entonces para f suficientemente regular se tiene

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |r| \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr d\theta$$

La demostración de este teorema está en la sección 3.2.2.

La Fig: 1.13, ilustra la relación que existe entre las imágenes, las proyecciones (\mathcal{RT}) y la transformada de Fourier.

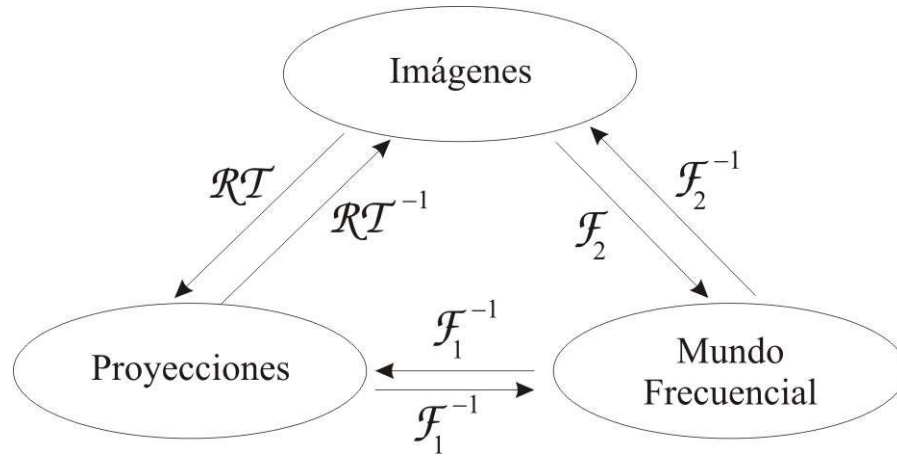


Figura 1.13: Relación entre las transformadas de Fourier y Radon.

Donde:

- * \mathcal{F}_1 es la transformada de Fourier unidimensional.
- * \mathcal{F}_2 es la transformada de Fourier bidimensional.
- * \mathcal{RT} es la transformada de Radon.

[Ca], [Cu], [Han], [Ka]

Capítulo 2

Tomografía

2.1. La Tomografía y su desarrollo histórico

Tomografía

La palabra tomografía proviene del griego *tomos* (sección) + *grafía* (escritura). Tomografía por tanto se refiere a cualquier técnica que permita visualizar la sección transversal de un objeto.

Asímismo, la tomografía es un tipo de ensayo no-destructivo, posibilitando visualizar el interior de un cuerpo sin tener la necesidad de abrirlo.[W]

Existen diversos tipos de tomografías. Cada tipo se basa en un principio físico diferente. La tomografía de rayos X , por ejemplo, tiene como fundamento la atenuación sufrida por un grupo de rayos X al atravesar un objeto.

Por otro lado, la tomografía por emisión, utiliza informaciones sobre el decaimiento de isótopos radioactivos para generar una imagen de su distribución espacial. En seguida se presenta una lista de los tipos de tomografías más conocidas.

1. Tomografía de rayos X
2. Tomografía computarizada por emisión única de fotón (SPECT - Single photon emission computerized tomography)
3. Tomografía por emisión de positrón (PET - Positron emission tomography)
4. Tomografía de ultrasonido
5. Tomografía de impedancia eléctrica
6. Tomografía de protones

Parte Histórica

La teoría matemática de reconstrucción de imágenes fue descubierta a comienzos del siglo pasado por el matemático austriaco Johann Radon. En su artículo “Sobre la determinación de funciones conociendo sus integrales a lo largo de ciertas direcciones”, de 1917, Radon presentó cómo, a partir de un conjunto de proyecciones, se puede determinar la función original.

Sin embargo, fue apenas en la década de los años 60 que emergieron los primeros tomógrafos. Específicamente fue en 1961 que el neurólogo William H. Oldendorf construye el primer prototipo de tomógrafo.

Para esto utilizando una fuente radioactiva de yodo en un detector cintilador, Oldendorf reconstruye, por el método de la retroproyección, la imagen de un cuerpo de prueba hecho de clavos (“pregos”).

En esa época, debido a las dificultades prácticas, este equipo fue considerado comercialmente inviable. Oldendorf hizo caso omiso al siguiente comentario que un fabricante de equipos de rayos X hizo: “Diseñar un mecanismo como el que usted sugiere, significa diseñar un aparato muy costoso, para lo cual no tendríamos un mercado significativo, pues lo único que hace es generar radiografías de secciones transversales de la cabeza”.

Por otro lado, así como Oldendorf, el físico Allan M. Cormack, de padres escoceses pero nacido en África del Sur, también se interesó en conocer la distribución de los coeficientes de atenuación de los tejidos del cuerpo humano.

En 1955, Cormack fue invitado para trabajar en el hospital Groote Schuur de la ciudad del Cabo, supervisando el uso de los isótopos radioactivos. Esta actividad al parecer fue la que le advirtió que debería existir una manera de determinar las heterogeneidades de una sección recta a partir de las mediciones realizadas en una región exterior.

Sin embargo, al indagar sobre este tema, el físico no encontró trabajos con una solución matemática para este problema. Cormack entonces realizó una serie de estudios teóricos y experimentales, publicados en artículos los años 1963 y 1964. (Tomado de [Co].)

El primer tomógrafo clínico fue desarrollado por el ingeniero electricista inglés Godfrey N. Hounsfield. El interés de Hounsfield por la tomografía computarizada surge en 1967, mientras él investigaba el reconocimiento automático de patrones en el laboratorio de investigación de EMI. (Tomado de [Ho].)

En los primeros experimentos Hounsfield utilizaba una fuente de rayos gamma con bajas intensidades. Debido a las limitaciones de la época, se requerían 9 días para completar el barrido. Más adelante la fuente de rayos gamma fue sustituida por una fuente de rayos X , reduciendo el tiempo de barrida a 9 horas. La figura 2.1 muestra el primer prototipo de tomógrafo de cerebro, desarrollado por Hounsfield [Hg].

En 1979, Alan Cormack e Godfrey Hounsfield recibieron el premio Nóbel de medicina por el desarrollo del tomógrafo computarizado.

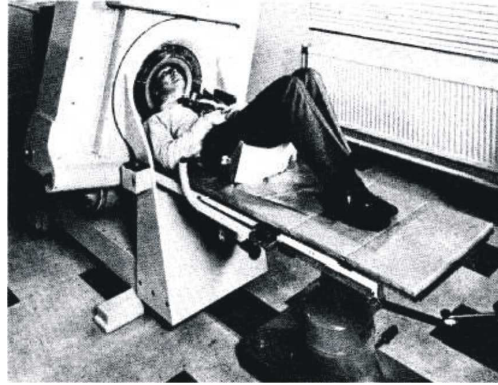


Figura 2.1: Primer protótipo de tomógrafo de cerebro, tomado de [W]

Los tomógrafos pueden ser definidos como un equipo que mide las densidades radiológicas de los cortes de volúmenes. Este medio radiológico necesita ser auxiliado por una imagen radiológica convencional.

Los tomógrafos miden las atenuaciones que los rayos X sufren al pasar por un cuerpo. Los estudios de las atenuaciones se realizan sobre un manojo fino de rayos X , definido por una *colimación*¹ en la cual se aplican los rayos X que van hacia un detector de rayos X .

Los detectores están constituídos de cristales de cintilación en cámaras de ionización que permiten cuantificar las medidas. Su sensibilidad es extremadamente mayor que la película radiográfica. Los detectores de la fuente de rayos X están situados en un equipo fijo, que define un plano para detectar las ondas de rayos X . Cuando el objeto a ser estudiado es colocado en la dirección del rayo, el dispositivo proporciona la medida de atenuación radiante de ese objeto.

Mediante los detectores se obtienen una serie de medidas de atenuaciones resultantes de los rayos X que atraviesan un cuerpo. Una suma de estas proyecciones no son suficientes para la reconstrucción del corte. Son necesarias innumerables proyecciones.

A través de un movimiento de rotación del conjunto en torno del eje del objeto examinado, es posible registrar una serie de proyecciones de atenuaciones (perfil) que resultan del rayo que atraviesa el mismo corte en direcciones distintas. [Co], [Hg], [Ho], [Q], [Na]

La Figura 2.2 ilustra un esquema simplificado de tomografía computarizada.

¹ acción de dirigir la vista en ciertos aparatos ópticos.

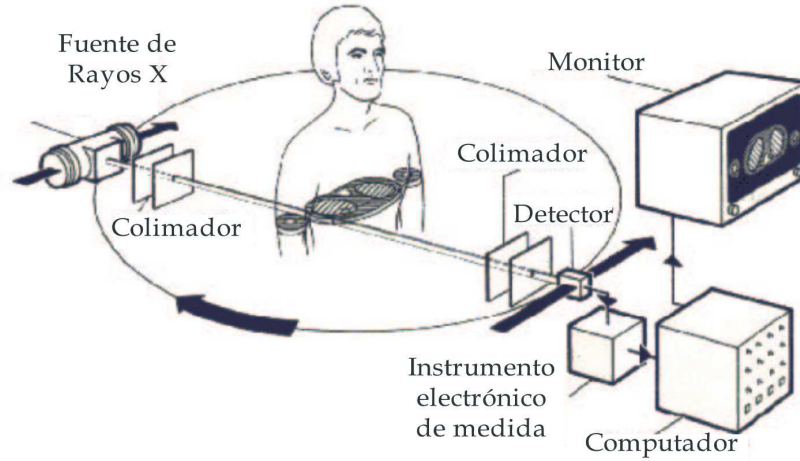


Figura 2.2: Sistema simplificado de tomografía computarizada, tomado de [W]

2.2. Planteamiento Matemático del Problema

La tomografía es un suceso que tiene mayor tecnología en la medicina. Existen varios tipos de tomografía, sin embargo la tomografía clásica está basada en la transformada de Radon.

Es claro que cuando una muestra es atravesada por un fino haz de rayos X de intensidad I , la disminución de dicha intensidad depende de la densidad ρ de la muestra (el plomo es más “resistente” a los rayos X que el aire) y de su grosor.

Si dividimos la zona atravesada por los rayos en pequeñas rodajas transversales de tamaño infinitesimal (ver figura 2.3), en las que la densidad sea prácticamente constante, es natural suponer que la proporción en que disminuye la intensidad es directamente proporcional a ambas cantidades, digamos con constante de proporcionalidad uno mediante una elección adecuada de las unidades.

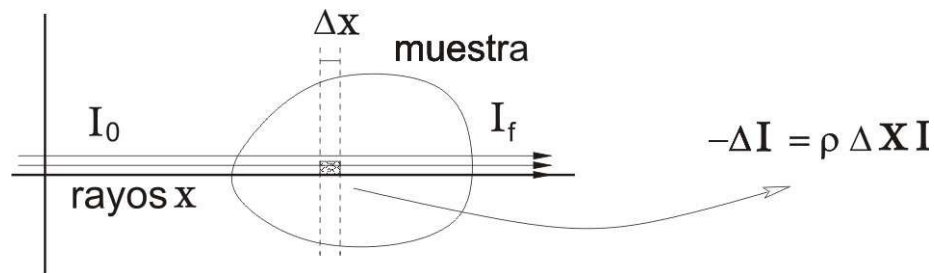


Figura 2.3: Muestra siendo atravesada por los rayos

Pasando al límite en la anchura de las rodajas

$$-dI = \rho I dx \Rightarrow I' = -\rho I \Rightarrow -(\ln I)' = \rho$$

De modo que si I_0 es la intensidad inicial (antes de entrar en la muestra) e I_f es la intensidad final (después de salir), integrando se tiene

$$\ln I_0 - \ln I_f = \int \rho.$$

Evidentemente, si los rayos siguen una recta L , en vez del eje OX , la integral anterior es la integral de línea a lo largo de L .

En definitiva, lo que debemos tener en mente es que midiendo intensidades iniciales y finales podemos saber las integrales de la densidad a lo largo de las líneas rectas que siguen los rayos. (Este modelo se conoce como la ley de Beer-Lambert)

Ahora, si como muestra, tomamos una parte del cuerpo humano y hacemos un corte transversal y emitimos un haz delgado de rayos X en dirección de la recta L (como se muestra en la figura 2.4).

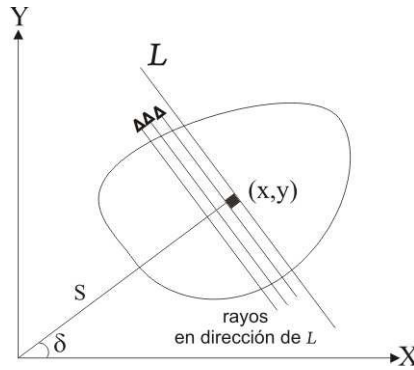


Figura 2.4: Plano a través del cuerpo humano

Obtenemos, que nuestra intensidad, varía de acuerdo a la densidad de la muestra, entonces nuestro modelo sería:

$$(2.1) \quad \frac{\Delta I}{I} = -f(x, y) \Delta(x, y)$$

donde $f(x, y)$ es la función que denota la densidad de la muestra en el punto (x, y) .

Integrando esta ecuación a lo largo de la recta L obtenemos:

$$(2.2) \quad \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_{L(\delta, s)} f(x, y) dL,$$

donde I_0 es la intensidad del rayo antes de atravesar la muestra e I es la intensidad del rayo después de atravesar la muestra y la recta L tiene la ecuación

$$L_{(\delta, s)} = \{(s \cos \delta, s \sin \delta) + \mu(-\sin \delta, \cos \delta); \mu \in \mathbb{R}, \delta \in (0, \pi]\}$$

Ahora podemos calcular esta integral de línea sobre cada una de las rectas.

$$(2.3) \quad \mathcal{R}f(s, \delta) = \int_{L(\delta, s)} f(x, y) dL.$$

El operador que asigna a una función escalar su integral de línea sobre cada recta es esencialmente lo que se llama Transformada de Radon de f . (Ver la sección 1.2 del Capítulo 1.)

El *problema directo* es el de calcular la *transformada de Radon* $\mathcal{R}f$ cuando se conoce el valor de f . Mientras que el *problema inverso* es el de determinar la densidad f cuando se conoce la transformada de Radon $\mathcal{R}f$.

2.3. Mal Condicionamiento

Hadamard (1932) clasifica los modelos matemáticos para un problema físico (en términos de una ecuación en derivadas parciales con valores en la frontera) como problemas bien condicionados o problemas mal condicionados.

Un problema es bien condicionado si cumple con las siguientes propiedades:

1. Existe solución para el problema (*la existencia*).
2. La solución que existe es única (*la unicidad*).
3. La solución depende continuamente de los datos (*la estabilidad*).

Matemáticamente el problema de la existencia de la solución puede solucionarse agrandando el espacio de la solución. El concepto de solución distribucional de una ecuación diferencial es un ejemplo. Si un problema tiene más de una solución, entonces la información acerca del modelo es insuficiente, en este caso pueden ser introducidas propiedades adicionales en el modelo con la finalidad de buscar una única solución.

El requisito de la estabilidad es el más importante, pues si el problema no es estable, entonces la solución es prácticamente imposible de calcular, pues adicionalmente a esto se suma que toda medida numérica está contaminada por errores imposibles de evitar, si tenemos en cuenta eso, los datos del problema siempre están perturbados.

Si la solución no depende continuamente de los datos entonces en general la solución aproximada no tiene nada que ver con la solución exacta. No hay manera de evitar este problema si no se tiene información adicional sobre la solución. La falta de información no se puede remediar por ningún artificio matemático.

Definición 2.1. (Buen Condicionamiento)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} dos espacios normados, $\mathcal{K} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador (lineal o no lineal). La ecuación $\mathcal{K}x = y$ es llamada **bien condicionada o bien puesta** si cumple las siguientes propiedades:

1. *La Existencia:* Para cada $y \in \mathcal{Y}$ existe $x \in \mathcal{X}$ (al menos uno) tal que $\mathcal{K}x = y$.
2. *La Unicidad:* Para cada $y \in \mathcal{Y}$ existe a lo más un $x \in \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{K}x = y$.
3. *La Estabilidad:* La solución x depende continuamente de y , es decir, para cada sucesión $(x_n) \in \mathcal{X}$ con $\mathcal{K}x_n \rightarrow \mathcal{K}x$, $(n \rightarrow \infty)$, esto implica que, $(x_n) \rightarrow x$ $(n \rightarrow \infty)$.

Luego, cualquier ecuación que no cumpla con al menos una de las propiedades anteriores es llamado problema **mal condicionado o mal puesto**.

Es de mucha importancia conocer la terna $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{K})$ y sus respectivas normas. La existencia y la unicidad dependen solo de la naturaleza algebraica del operador y de los espacios, i.e., ¿Dónde el operador es sobre y uno a uno?.

En cambio la estabilidad depende también de la topología de los espacios. i.e., ¿Dónde el operador inverso $\mathcal{K}^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es continuo?. Estos requerimientos no son independientes uno del otro, por ejemplo de acuerdo con el teorema de la función abierta (ver teorema A.1 del Apéndice), el operador inverso \mathcal{K}^{-1} es automáticamente continuo si \mathcal{K} es un operador lineal y continuo y los espacios \mathcal{X}, \mathcal{Y} son espacios de Banach.

Los operadores integrales son *operadores compactos* en muchas topologías naturales bajo condiciones muy débiles en el núcleo. El siguiente teorema implica que las ecuaciones lineales de la forma $\mathcal{K}x = y$ donde \mathcal{K} es un operador compacto, entonces siempre es un problema mal puesto.

Teorema 2.1.

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} dos espacios normados y $\mathcal{K} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal compacto con espacio nulo $\mathcal{N}(\mathcal{K}) := \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{K}x = 0\}$. Sea la dimensión del espacio cociente $\mathcal{X}/\mathcal{N}(\mathcal{K})$ infinita. Entonces existe una $(x_n) \in \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{K}x_n \rightarrow 0$ pero (x_n) no converge. Además podemos escoger (x_n) tal que $\|x_n\| \rightarrow \infty$. En particular si \mathcal{K} es un operador $1-1$, el operador inverso $\mathcal{K}^{-1} : \mathcal{K}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es ilimitado.

Demostración.

Llamemos $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{K})$ al núcleo del operador \mathcal{K} , dotemos al espacio cociente \mathcal{X}/\mathcal{N} con la norma $\|[x]\| := \inf \{\|x + z\| : z \in \mathcal{N}\}$.

Por hipótesis \mathcal{K} es un operador compacto, esto implica que \mathcal{K} es un operador acotado entonces \mathcal{K} es un operador continuo.

Veamos que el espacio nulo es cerrado, en efecto veremos que $\overline{\mathcal{N}(\mathcal{K})} \subset \mathcal{N}(\mathcal{K})$

Sea $a \in \overline{\mathcal{N}(\mathcal{K})} \Rightarrow$ existe $(a_n) \subset \mathcal{N}(\mathcal{K})$ tal que $a_n \rightarrow a$
 $\Rightarrow \mathcal{K}a_n \rightarrow \mathcal{K}a$, pues \mathcal{K} es continuo.
 $\Rightarrow \mathcal{K}a = 0$, pues $\mathcal{K}a_n \rightarrow 0$, ya que $(a_n) \subset \mathcal{N}(\mathcal{K})$
 $\Rightarrow a \in \mathcal{N}(\mathcal{K})$, y esto prueba que el espacio nulo es cerrado.

Definimos:

$$\tilde{\mathcal{K}} : \frac{X}{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{Y}, \text{ como } \tilde{\mathcal{K}}([x]) := \mathcal{K}x, \forall [x] \in \frac{X}{\mathcal{N}}$$

- Probemos que $\tilde{\mathcal{K}}$ está bien definida

$$\text{Sean } [x_1], [x_2] \text{ tal que } [x_1] = [x_2]$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 + n, \text{ para algún } n \text{ tal que } n \in \mathcal{N}$$

Luego

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}([x_1]) &= \mathcal{K}x_1 \text{ (por definición de } \tilde{\mathcal{K}}) \\ &= \mathcal{K}(x_2 + n) \\ &= \mathcal{K}x_2 + \mathcal{K}n \\ &= \mathcal{K}x_2, \text{ (pues } \mathcal{K}n = 0 \text{ por estar } n \text{ en el núcleo)} \\ &= \tilde{\mathcal{K}}([x_2]) \end{aligned}$$

- Probemos que $\tilde{\mathcal{K}}$ es compacto, es decir, debemos probar que para todo conjunto B acotado se tiene que $\overline{\tilde{\mathcal{K}}(B)}$ es un conjunto compacto. En efecto, sea B un conjunto acotado de \mathcal{X}/\mathcal{N} entonces

$$B = \{b + n : n \in \mathcal{N}, b \in \mathcal{X}\}.$$

$$\text{sea } B_1 = \{b : b + n \in B\}$$

$$\text{y } N_1 = \{n : b + n \in B\},$$

$$\text{Luego } B = B_1 + N_1$$

donde B_1 es acotado por ser un subconjunto de un conjunto acotado.

Probemos que $\overline{\tilde{\mathcal{K}}([B])}$ es un conjunto compacto, en efecto:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\mathcal{K}}([B])} &= \overline{\mathcal{K}B} \\ &= \overline{\mathcal{K}(B_1 + N_1)} \\ &= \overline{\mathcal{K}B_1 + \mathcal{K}N_1} \\ &= \overline{\mathcal{K}B_1} \end{aligned}$$

Como \mathcal{K} es un operador compacto, entonces $\overline{\mathcal{K}B_1}$ es un conjunto compacto, por lo tanto $\overline{\tilde{\mathcal{K}}([B])}$ también es un conjunto compacto, y como B fue tomado arbitrariamente entonces $\tilde{\mathcal{K}}$ es un operador compacto.

- Demostremos que $\tilde{\mathcal{K}}$ es 1 - 1, en efecto, supongamos que $\tilde{\mathcal{K}}([x]) = \tilde{\mathcal{K}}([y])$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathcal{K}x = \mathcal{K}y \\
&\Rightarrow \mathcal{K}(x - y) = 0 \\
&\Rightarrow x - y \in \mathcal{N}(\mathcal{K}) \\
&\Rightarrow x - y = n, \text{ tal que } n \in \mathcal{N}(\mathcal{K}) \\
&\Rightarrow x = y + n \\
&\Rightarrow [x] = [y], \text{ por lo tanto } \tilde{\mathcal{K}} \text{ es } 1 - 1.
\end{aligned}$$

Entonces por lo anterior existe el operador inverso $\tilde{\mathcal{K}}^{-1}$.

- Probemos que $\tilde{\mathcal{K}}^{-1} : \mathcal{Y} \supset \mathcal{K}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{N}$ no está acotado, en efecto, pues si $\tilde{\mathcal{K}}^{-1}$ estaría acotado, entonces el operador identidad

$$\mathcal{I} : \tilde{\mathcal{K}}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{K}} : \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}} \rightarrow \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}}$$

sería compacto, pues $\tilde{\mathcal{K}}$ es compacto y $\tilde{\mathcal{K}}^{-1}$ está acotado. (Por teorema A.8 del anexo.) Luego entonces el operador \mathcal{I} sería compacto, lo que implica que la esfera unitaria sería compacta.

$$\text{Entonces } \dim \left(\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}} \right) < \infty \text{ (por teorema A.9 del anexo.)}$$

$$(\Rightarrow | \Leftarrow), \text{ pues por hipótesis } \dim \left(\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}} \right) = \infty$$

por lo tanto $\tilde{\mathcal{K}}^{-1}$ no está acotado, de donde resulta que:

para todo $n > 0$ existe $y_n \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ tal que:

$$(2.4) \quad n \|y_n\| < \left\| \tilde{\mathcal{K}}^{-1}(y_n) \right\|,$$

si bien, $y_n \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ entonces $y_n = \tilde{\mathcal{K}}([z_n])$, para algún $[z_n] \in \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}}$, luego en (2.4) tenemos

$$n \left\| \tilde{\mathcal{K}}([z_n]) \right\| < \left\| \tilde{\mathcal{K}}^{-1}(\tilde{\mathcal{K}}([z_n])) \right\| = \|[z_n]\|$$

entonces

$$\left\| \tilde{\mathcal{K}}([z_n]) \right\| < \frac{1}{n} \|[z_n]\|.$$

Podemos tomar $[z_n]$ de tal manera que $\|[z_n]\| = 1$ y si hacemos tender n al infinito obtenemos que $\left\| \tilde{\mathcal{K}}([z_n]) \right\| \rightarrow 0$, por definición $\tilde{\mathcal{K}}([z_n]) = \mathcal{K}z_n$, entonces tenemos que $\mathcal{K}z_n \rightarrow 0$.

Por lo tanto existe $[z_n]$ con $n \geq 1$ tal que $\|[z_n]\| = 1$ y $\mathcal{K}z_n \rightarrow 0$.

Para la parte final del teorema podemos escoger $v_n \in \mathcal{N}$ tal que

$$\frac{1}{2} \leq \|z_n + v_n\|; \text{ ahora, sea la sucesión } x_n := \frac{(z_n + v_n)}{\sqrt{\|\mathcal{K}z_n\|}} \text{ entonces}$$

se verifica que $\mathcal{K}x_n \rightarrow 0$, además $\|x_n\| \rightarrow \infty$, pues de $\frac{1}{2} \leq \|z_n + v_n\|$, tenemos

$$\frac{1}{2\sqrt{\|\mathcal{K}z_n\|}} \leq \frac{\|z_n + v_n\|}{\sqrt{\|\mathcal{K}z_n\|}} = \left\| \frac{z_n + v_n}{\sqrt{\|\mathcal{K}z_n\|}} \right\| = \|x_n\|,$$

y como $\frac{1}{2\sqrt{\|\mathcal{K}z_n\|}}$ tiende al infinito, se concluye que $\|x_n\| \rightarrow \infty$.

En resumen, hemos construido una sucesión (x_n) tal que $\|x_n\| \rightarrow \infty$ con lo cual concluye el teorema.

□

2.4. Mal condicionamiento de la Transformada de Radon

Veamos que el operador

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{R} : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) &\rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R} \times S^1) \\ f &\rightarrow \mathcal{R}f \end{aligned}$$

definido como

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \int_{L(\theta, s)} f(x, y) dL.$$

Satisface las hipótesis del teorema 2.1, i.e., Veremos que el problema de tomografía es un problema mal condicionado, en efecto

$$\mathcal{X} = C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ e } \mathcal{Y} = C_0^\infty(\mathbb{R} \times S^1)$$

son espacios normados.

- Probemos que $\mathcal{R} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es un operador lineal, es decir

$$\mathcal{R}(\alpha f + \beta g)(s, \theta) = \alpha \mathcal{R}f(s, \theta) + \beta \mathcal{R}g(s, \theta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in \mathcal{X}$$

en efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha f + \beta g)(s, \theta) &:= \int_{L(\theta, s)} (\alpha f + \beta g)(x, y) dL \\ &= \int_{L(\theta, s)} \alpha f(x, y) dL + \int_{L(\theta, s)} \beta g(x, y) dL \\ &= \alpha \int_{L(\theta, s)} f(x, y) dL + \beta \int_{L(\theta, s)} g(x, y) dL \\ &= \alpha \mathcal{R}f(s, \theta) + \beta \mathcal{R}g(s, \theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es un operador lineal.

- Probemos que \mathcal{R} es un operador acotado, para ello es necesario señalar previamente la topología que se está tomando, en nuestros espacios de funciones, consideraremos las normas

$$\|f\| = \max_{(x,y) \in J} |f(x,y)|$$

donde J es un conjunto en el que la función f no se anula, i.e.

$$J = \{ (x,y) / f(x,y) \neq 0 \}.$$

Ahora estamos en condiciones de ver que \mathcal{R} es un operador acotado, en efecto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}f\| &= \max_{(x,y) \in J} |\mathcal{R}f(s,\theta)| \\ &= \max_{(x,y) \in J} \left| \int_{L(\theta,s)} f(x,y) dL \right| \\ &\leq \max_{(x,y) \in J} \int_{L(\theta,s)} |f(x,y)| dL \\ &\leq \|f\| \max_{(x,y) \in J} \int_{L(\theta,s)} dL \\ &= C \|f\| \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es un operador acotado.

- Veamos que \mathcal{R} es un operador compacto, para ello usaremos la definición equivalente dada en el teorema A.6 la cual dice que un operador T es compacto si y solo si cada sucesión acotada (f_n) en \mathcal{X} define una sucesión $(y_n) = (T f_n)$ la cual posee una subsucesión convergente. Luego, para probar que posee una subsucesión convergente usaremos el teorema de Ascoli (teorema A.7 del apéndice), el cual dice que una sucesión equicontinua² (y_n) posee una subsucesión convergente.

Luego, consideremos que tenemos una sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{X}$, acotadas, i.e. existe $C > 0$ tal que $\|f_n\| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que y_n es una sucesión acotada:

$$|y_n| = \|\mathcal{R}f_n\| \leq \|\mathcal{R}\| \|f_n\| \leq \|\mathcal{R}\| C \leq \tilde{C}$$

por lo tanto (y_n) define también una sucesión acotada.

Probemos que (y_n) es una sucesión equicontinua, para ello probaremos que satisface la definición de equicontinuidad, i.e. dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal manera que para todo $(s_1, \theta_1), (s_2, \theta_2) \in \mathbb{R} \times S^1$ que satisface $|(s_1, \theta_1) - (s_2, \theta_2)| < \delta$ se cumple que $|y_n(s_1, \theta_1) - y_n(s_2, \theta_2)| < \epsilon$

en efecto

$$\begin{aligned} |y_n(s_1, \theta_1) - y_n(s_2, \theta_2)| &= |\mathcal{R}f_n(s_1, \theta_1) - \mathcal{R}f_n(s_2, \theta_2)| \\ &= \left| \int_{L(\theta_1, s_1)} f_n(x,y) dL - \int_{L(\theta_2, s_2)} f_n(x,y) dL \right| \end{aligned}$$

²Ver definición A.5 del apéndice

Ahora usando la transformación definida en la ecuación (3.17), tenemos:

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n \circ T(s_1, u) du - \int_{-\infty}^{\infty} f_n \circ T(s_2, u) du \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n \circ T(s_1, u) - f_n \circ T(s_2, u)) du \right| \end{aligned}$$

Por otro lado como f_n es una función que tiene soporte compacto, bastará integrar de $-M$ a M en vez de todo \mathbb{R} , luego tenemos:

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{-M}^M (f_n \circ T(s_1, u) - f_n \circ T(s_2, u)) du \right| \\ &\leq \int_{-M}^M |(f_n \circ T(s_1, u) - f_n \circ T(s_2, u))| du \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(2.6) \quad |y_n(s_1, \theta_1) - y_n(s_2, \theta_2)| \leq \int_{-M}^M |(f_n \circ T(s_1, u) - f_n \circ T(s_2, u))| du$$

Por otro lado como f_n es una función continua y T es una transformación lineal y continua entonces $f_n \circ T$ es una función continua entonces para dicho $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si satisface

$$|(s_1, \theta_1) - (s_2, \theta_2)| < \delta,$$

entonces se verifica que

$$|f_n \circ T(s_1, \theta_1) - f_n \circ T(s_2, \theta_2)| < \epsilon/2M.$$

Por lo tanto la desigualdad (2.6) se transforma en:

$$\begin{aligned} |y_n(s_1, \theta_1) - y_n(s_2, \theta_2)| &\leq \int_{-M}^M |(f_n \circ T(s_1, u) - f_n \circ T(s_2, u))| du \\ &< \frac{\epsilon}{2M} \int_{-M}^M du \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Esto prueba la equicontinuidad de (y_n) . Luego, por el teorema de Ascoli, (y_n) posee una subsucesión convergente. Por lo tanto de acuerdo con el teorema A.6 del apéndice, \mathcal{R} es un operador compacto.

- Por otro lado, como \mathcal{X} y $\mathcal{X}/\mathcal{N}(\mathcal{R})$ son isomorfos, entonces

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{X}/\mathcal{N}(\mathcal{R})),$$

entonces como $\dim(\mathcal{X}) = \infty$, entonces $\dim(\mathcal{X}/\mathcal{N}(\mathcal{R})) = \infty$

Por lo tanto \mathcal{R} satisface las hipótesis del teorema 2.1, por lo tanto es un problema mal condicionado.

Capítulo 3

Métodos de Solución

3.1. Reconstrucción Algebraica

Teniendo presente nuestro problema, que es el de encontrar f conociendo su transformada de Radon $\mathcal{R}f$ (ver sec. 2.2) i.e., como planteamiento matemático del problema obtuvimos la ecuación (2.2).

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_L f(x, y) dL$$

Donde f es la densidad del objeto. Imaginemos que podemos dividir el objeto en cuadraditos en los cuales la densidad sea constante, para ello introducimos una malla cuadrada (ver figura 3.1) la que superpondremos a la región que nos interesa, y ahora, encontramos que tenemos que determinar ya no f , sino f_i , $i = 1, 2, \dots N$. Es decir tenemos que determinar N incógnitas.

Dado que la sección transversal consta de N incógnitas, entonces nuestro objetivo es poder establecer ecuaciones algebraicas para las incógnitas en términos de los datos obtenidos.

Los problemas de este tipo (sistema de ecuaciones lineales) son algunas veces más adecuados para la solución por técnicas algebraicas. Cabe observar que cuando un rayo es emitido, un poco de la intensidad del rayo se dispersa debido a la refracción¹ y a la difracción².

Sin embargo, las técnicas algebraicas son también útiles en este caso, i.e., también son útiles cuando los caminos de propagación del rayo entre la fuente y las posiciones del aparato receptor hacen un giro a causa de la refracción, o cuando la propagación del rayo experimenta atenuación a lo largo de camino del rayo.

¹Es el cambio de dirección que sufre el rayo de luz que pasa oblicuamente de un medio a otro de distinta densidad.

²Desviación del rayo luminoso al rozar los bordes de un cuerpo opaco

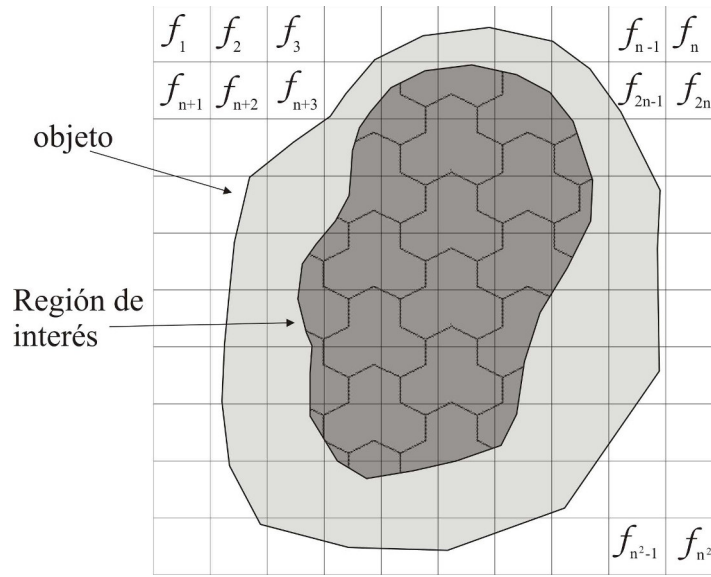


Figura 3.1: Objeto al que se le ha introducido una malla.

En los métodos algebraicos es esencial saber la ruta que sigue el rayo es decir la ruta que sigue desde el transmisor correspondiente hasta el aparato receptor. Cuando la refracción y los efectos de difracción son muchos (El término medio en las homogeneidades exceden al 10 % del valor común de los antecedentes y la distancia de correlación de éstos con las homogeneidades es comparable con una longitud de onda[Kak]), es casi imposible predecir los caminos que está siguiendo el rayo. Si las técnicas algebraicas son aplicadas en estas condiciones, entonces a menudo obtenemos resultados sin sentido.

Si la refracción y efectos de difracción son pequeños (El término medio en las homogeneidades es menor que 2 ó 3 % del valor común de los antecedentes y el ancho de correlación de éstos con las homogeneidades es comparable con una longitud de onda[Kak]), en este caso es posible combinar las técnicas algebraicas con técnicas de trazado digital, se diseñan procedimientos iterativos en los cuales la primera construcción elabora una imagen ignorando la refracción, luego se vuelven a emitir nuevos rayos tratando de seguir la pista dejada por los rayos emitidos anteriormente, conectando las posiciones del transmisor correspondiente y del aparato receptor a través de esta distribución, y finalmente, se usan estos rayos para construir un conjunto más exacto de ecuaciones algebraicas.

Nuestra meta en esta parte será el de presentar un acercamiento algebraico para la reconstrucción de la imagen. Primero mostraremos cómo podemos construir un conjunto de ecuaciones de primer grado cuyas incógnitas son elementos que ayudan a la reconstrucción del objeto.

En definitiva, lo que debemos tener en mente es que midiendo intensidades iniciales e intensidades finales podemos saber las integrales de la densidad a lo largo de las líneas rectas que siguen los rayos.

El método y los algoritmos de reconstrucción algebraica comienzan considerando una versión discretizada (digitalizada) de la sección que se quiere examinar, que lo llamaremos *sección cuadrada digitalizada*³. Con tal propósito, introducimos una malla cuadrada de $n \times n$ cuadraditos (*pixels*)⁴. (Ver figura 3.1)

Si la malla es suficientemente fina, la densidad es aproximadamente constante en cada cuadradito. Así que se puede considerar que hay una matriz de densidades $n \times n$ donde el elemento f_j es la densidad en el cuadradito c_j .

En la figura 3.2 superpusimos una malla cuadrada en la imagen con densidad $f(x, y)$; asumiremos que en cada cuadradito la función $f(x, y)$ es constante. y lo denotaremos por f_j este valor constante en el cuadradito j -ésimo. Para las técnicas algebraicas un rayo está definido algo diferente. Un rayo es ahora una línea “gruesa” que está atravesando el punto (x, y) y desplazándose a través del plano.

Para ilustrar esto hemos sombreado el i -ésimo rayo (ver Figura 3.2), donde cada rayo tiene una anchura r . En la mayoría de las veces la anchura del rayo es aproximadamente igual a la anchura de la celda de la imagen. Una integral de línea ahora se llama una *suma del rayo*.

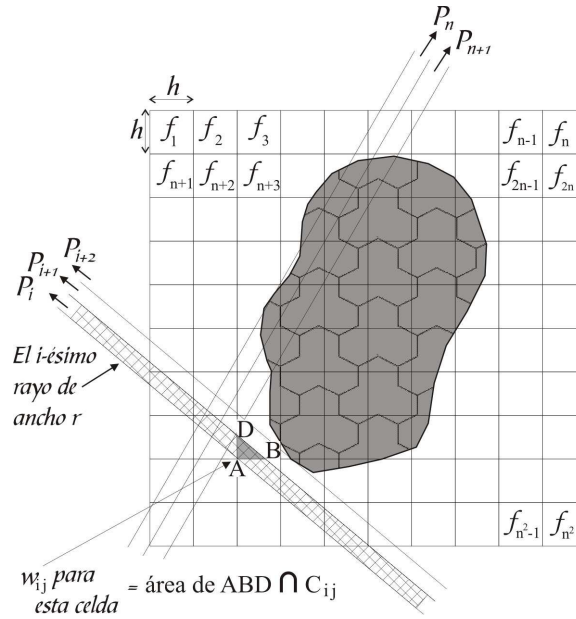


Figura 3.2: La cuadrícula cuadrada está superpuesta encima de la imagen desconocida. Los valores de la imagen se asumen que son constante dentro de cada cuadradito de la cuadrícula.

Por otra parte, la atenuación de un rayo a lo largo de una recta L permite conocer $\int_L f(x, y) dL$, que en esta versión digitalizada, se aproxima por una suma de Riemann, y de hecho coincide con ella suponiendo $f(x, y)$ es realmente

³ Es una malla que está formada por cuadraditos $c_{i,j}$

⁴ Es un cuadradito ij en el cual la densidad es constante

constante en cada c_j .

$$(3.1) \quad \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_L f(x, y) dL = \sum f_j |c_i \cap L|$$

Como en la imagen, las proyecciones también recibirán una representación de subíndices. Sea b_i la suma del i -ésimo rayo.

La relación entre los f_j 's y los b_j 's puede ser expresada como

$$(3.2) \quad \sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = b_j, \forall i = 1, 2, 3, 4, \dots, M$$

Donde la M es el número total de rayos (en todas las proyecciones) y w_{ij} es el factor de “resistencia” que representa la contribución de la j -ésima celda para el i -ésimo rayo. El factor w_{ij} es igual a la porción del área de la j -ésima celda interceptada por el i -ésimo rayo como se muestra para una de las celdas en la figura 3.2. Notar que la mayoría de los w_{ij} son cero y que solo un número pequeño de celdas contribuye en la suma del rayo.

Se puede pensar que el problema ya está resuelto, pues queremos calcular el valor de las incógnitas $f_1, f_2, f_3, \dots, f_N$, y según la ecuación (3.1), para cada rayo tenemos una ecuación lineal en estas incógnitas; y basta tomar un número suficiente de rayos y resolver el sistema lineal correspondiente. sin embargo la sección siguiente nos muestra las dificultades a las que ahora nos enfrentamos.

3.1.1. Dificultades en la Reconstrucción Algebraica

Si M y N fueran pequeños, entonces podemos usar los métodos convencionales para aproximar la matriz inversa del sistema de ecuaciones dado en (3.2). Sin embargo, en la práctica N puede ser tan grande como 65 000 (para 256×256 imágenes [Kak]), y M también tendrá la misma magnitud. Para estos valores de M y N el tamaño de la matriz $[w_{ij}]$ dado en la ecuación (3.2) es $65\,000 \times 65\,000$ que excluye cualquier posibilidad de inversión directa de la matriz.

Por supuesto cuando el ruido está presente en los datos medidos y cuando $M < N$, y aún para cuando N es pequeño no se puede usar inversión directa de la matriz, tenemos que recurrir a algún método como por ejemplo el método de mínimos cuadrados. Cuando M y N son grandes, tales métodos son computacionalmente inaplicables.

Por otro lado, supongamos por ejemplo que deseamos tener una resolución comparable a la de un monitor y para ello imaginamos una malla de $1\,000 \times 1\,000$ pixels que contiene la sección del cuerpo humano que vamos a examinar (en [Kak] se toma 256×256 pixels como una resolución posible en la práctica). Entonces habría 10^6 f_j incógnitas que calcular.

El sistema lineal correspondiente tendrá una matriz de $10^6 \times 10^6 = 10^{12}$ elementos lo cual podría causar algunos problemas de memoria en las computadoras convencionales si los tenemos que almacenar todos (necesitaríamos algo comparable a un Terabyte de memoria libre).

Las estimaciones generales del número de operaciones para resolver un sistema lineal por eliminación de Gauss es del orden del cubo del número de variables, en nuestro caso 10^{18} . A una velocidad de 1GHz esto llevaría un tiempo del orden de 30 años (lo que no ayudaría mucho a reducir las listas de espera en los hospitales [Ch]).

3.1.2. Solución Matemática

Necesitamos, por tanto, un método maravilloso que requiera incomparablemente menos operaciones que el método de Gauss. Quizá tal método no exista en general, pero aquí estamos considerando sistemas muy especiales y hay esperanzas sobre todo si nos contentamos con soluciones aproximadas.

Nótese que típicamente un rayo atraviesa n pixels, con lo cual en cada ecuación solo aparecen n incógnitas de las $N = n \times n$ que hay en total. Es decir, la matriz de coeficientes es muy dispersa⁵.

Vamos a mostrar un método iterativo creado por S. Kaczmarz en 1937 que no altera la dispersión de la matriz, de hecho no modifica la matriz de coeficientes, lo que redundaría en que las operaciones solo se hacen con los coeficientes no nulos. Este método se basa en el “método de la proyecciones”.

El Método de Kaczmarz

Para explicar los pasos que involucra este método escribiremos la ecuación (3.2) en forma expandida.

$$\begin{array}{ccccccc} w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \dots + w_{1N}f_N & = & b_1 \\ w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + w_{23}f_3 + \dots + w_{2N}f_N & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + w_{M3}f_3 + \dots + w_{MN}f_N & = & b_M \end{array}$$

Una representación de la imagen con N cuadraditos, proporciona un grado de libertad N , por consiguiente, una imagen que está representada por:

$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_N)$, puede ser considerada como un único punto en el espacio N dimensional \mathbb{R}^N

⁵es una matriz que está llena de ceros.

En este espacio cada una de las ecuaciones anteriores representa un hiperplano, y cuando existe solución única, dicha solución es la intersección de todos estos hiperplanos.

Este método es una generalización en dimensiones mayores de un hecho muy sencillo, el cual describimos a continuación. Supongamos que tenemos dos rectas que se cortan y nuestro objetivo es encontrar una sucesión de puntos que se aproximen al punto de intersección, como primer paso escogemos un punto x_0 cualesquiera en \mathbb{R}^2 , ver figura 3.3.

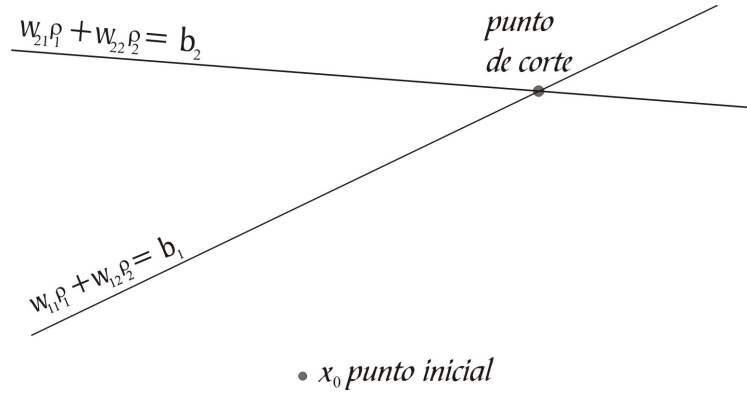


Figura 3.3: *Punto de intersección y punto de inicio*

Como segundo paso proyectamos la estimación inicial sobre la primera recta (“hiperplano”) representado por la primera ecuación, al obtener $\vec{f}^{(1)}$ lo proyectamos sobre la recta de la segunda ecuación, luego repetiremos los pasos anteriores con las diferentes ecuaciones, hasta obtener $\vec{f}^{(M)}$, una vez obtenido $\vec{f}^{(M)}$ lo proyectamos de nuevo sobre la primera recta y así sucesivamente, ver figura 3.4.

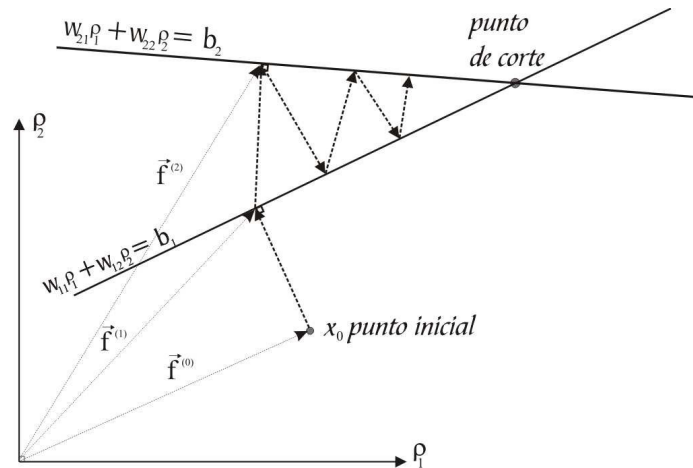


Figura 3.4: *Proyecciones sucesivas para aproximar el punto de intersección por el método de Kaczmarz*

Luego, podemos escribir un sistema de N ecuaciones con N incógnitas como:

$$(\vec{f}_1, \vec{x}) = b_1, \quad (\vec{f}_2, \vec{x}) = b_2, \quad (\vec{f}_3, \vec{x}) = b_3, \quad \dots \quad (\vec{f}_N, \vec{x}) = b_N,$$

Donde \vec{f}_i es la fila i -ésima de la matriz de coeficientes. Cada $(\vec{f}_i, \vec{x}) = b_i$, representa geométicamente un hiperplano.

Teorema 3.1.

Sea un sistema compatible determinado por N ecuaciones con N incógnitas:

$$(3.3) \quad (\vec{f}_1, \vec{x}) = b_1, \quad (\vec{f}_2, \vec{x}) = b_2, \quad (\vec{f}_3, \vec{x}) = b_3, \quad \dots \quad (\vec{f}_N, \vec{x}) = b_N,$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ es el vector de incógnitas. Introduciendo las aplicaciones afines $L_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definidas como

$$(3.4) \quad L_i(\vec{x}) = P_i(\vec{x}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \quad \text{con} \quad P_i(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{f}_i, \vec{x}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}$$

se tiene que para cualquier $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, el algoritmo iterativo

$$\vec{x}_{n+1} = (L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

genera una sucesión que converge a la solución del sistema.

Nota:

Calcular $L_i(\vec{x})$ requiere pocas operaciones, pues f_i contiene muchos ceros.

Demostración.

Primeramente veamos que $\vec{P}_i(\vec{v})$ es el operador proyección. En efecto:

- Probemos que P_i es una proyección, i.e., debemos probar que $P_i(P_i(\vec{v})) = P_i(\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} P_i(P_i(\vec{v})) &:= P_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= P_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v} - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= P_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + (\vec{f}_i, \vec{v}) (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= P_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= P_i(\vec{v}). \end{aligned}$$

Por lo tanto P_i es una proyección.

- Probemos que $P_i(\vec{v})$ proyecta el vector \vec{v} sobre el hiperplano $(\vec{f}_i, \vec{x}) = 0$, i.e., debemos probar $(\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) = 0$, en efecto tenemos:

$$\begin{aligned} (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) &= (\vec{f}_i, \vec{v} - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \\ &= (\vec{f}_i, \vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P_i(\vec{v})$ está en el hiperplano $(\vec{f}_i, \vec{x}) = 0$.

- Probemos que L_i es también un operador proyección, i.e., debemos probar que $L_i(L_i(\vec{v})) = L_i(\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} L_i(L_i(\vec{v})) &:= P_i(L_i(\vec{v})) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, L_i(\vec{v})) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, P_i(\vec{v}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} - b_i (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v} - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + (\vec{f}_i, \vec{v}) (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}). \end{aligned}$$

Por lo tanto L_i es un operador proyección.

- Veamos que $L_i(\vec{v})$ proyecta el vector \vec{v} sobre el hiperplano $(\vec{f}_i, \vec{x}) = b_i$,

i.e., $(\vec{f}_i, L_i(\vec{v})) = b_i$, en efecto tenemos:

$$\begin{aligned}
 (\vec{f}_i, L_i(\vec{v})) &= (\vec{f}_i, P_i(\vec{v}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \\
 &= (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) + b_i (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \\
 &= (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) + b_i \\
 &= (\vec{f}_i, \vec{v} - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) + b_i \\
 &= (\vec{f}_i, \vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) + b_i \\
 &= b_i.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $L_i(\vec{v})$ proyecta el vector \vec{v} sobre el hiperplano $(\vec{f}_i, \vec{x}) = b_i$.

Obs:

Nótese que $P_i(\vec{x})$ es la proyección cuando el hiperplano correspondiente $L_i(\vec{x})$ se traslada al origen.

Por otro lado, para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ se tiene que $\|P_1(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$, excepto si \vec{v} pertenece al plano, en cuyo caso tendríamos $(\vec{f}_1, \vec{v}) = 0$ y también $P_1(\vec{v}) = \vec{v}$. De la misma forma $\|(P_2 \circ P_1)(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$, excepto si $(\vec{f}_1, \vec{v}) = (\vec{f}_2, \vec{v}) = 0$, si seguimos este mismo argumento sucesivamente hasta llegar a N , donde se tendría $\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$, excepto si

$$(\vec{f}_1, \vec{v}) = (\vec{f}_2, \vec{v}) = (\vec{f}_3, \vec{v}) = \dots = (\vec{f}_{N-1}, \vec{v}) = (\vec{f}_N, \vec{v}) = 0,$$

como por hipótesis tenemos que el sistema es compatible, es decir que las \vec{f}_i son linealmente independientes, entonces la única solución de

$$(\vec{f}_1, \vec{v}) = (\vec{f}_2, \vec{v}) = (\vec{f}_3, \vec{v}) = \dots = (\vec{f}_{N-1}, \vec{v}) = (\vec{f}_N, \vec{v}) = 0$$

es la trivial.

Luego, podemos concluir que $\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(\vec{v})\| \leq C \|\vec{v}\|$ para algún $C < 1$, podemos también decir que $\|P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1\| \leq C < 1$.

Obs:

Notar que por la compacidad de la bola unitaria se tiene que el operador

$$\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(\vec{v}/\|\vec{v}\|)\|$$

alcanza un máximo, menor que 1, en $\mathbb{R}^N - \{\vec{0}\}$.

Consideremos el operador $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido como

$$Q = L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_2 \circ L_1,$$

Veamos que Q así definido es un operador de contracción. (ver A.1 del apéndice.) En efecto tenemos

$$\begin{aligned} \|Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\| &= \|(L_N \circ \dots \circ L_1)(\vec{x}) - (L_N \circ \dots \circ L_1)(\vec{y})\| \\ &= \|(L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x} - \vec{y})\| \\ &= \|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(\vec{x} - \vec{y})\| \\ &\leq C \|\vec{x} - \vec{y}\| \end{aligned}$$

Como $C < 1$ podemos concluir que Q es un operador de contracción.

Por otro lado por el teorema del punto fijo (ver teorema A.2 del apéndice) asegura que tiene un solo punto fijo que puede obtenerse con el algoritmo iterativo

$$\vec{x}_{n+1} = (L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Este punto fijo es la solución del sistema lineal (3.3), ya que los L_i dejan invariante a dicha solución pues al estar dicha solución en todos los hiperplanos es invariante bajo proyecciones sobre ellos.

□

Una ventaja del método es que se puede aplicar incluso en el caso en el que exista más ecuaciones que incógnitas simplemente aumentando el valor de N en el sistema (3.3). Así pues haciendo más mediciones de las que necesitamos podemos estar bastante seguros de que el sistema no es indeterminado, aunque corremos el riesgo que por errores experimentales o en el modelo, el sistema sea incompatible. Incluso en este caso, si los errores no son muy graves, la solución \vec{x}_n oscilará alrededor de la solución real.

Epílogo:

En la práctica, por razones de estabilidad, se usan más rayos que $N = n^2$ necesarios. De manera que se obtiene un sistema con más ecuaciones que incógnitas y que en general (por el más mínimo error de redondeo, experimental o del modelo) no es compatible pero está “cerca” de serlo. Incluso en este caso, se aplica el algoritmo del teorema anterior, entendiendo los \vec{x}_n como soluciones aproximadas (por grande que sea n). Un estudio más detallado de este método podemos encontrarlo en [Na] Cap.V. También en [Kak] Cap.7 pueden consultarse algunas variantes del método y ejemplo prácticos de los resultados obtenidos con $n = 128$

Ejemplos

En esta parte veremos un par de ejemplos en los cuales mostraremos cómo podemos aplicar el teorema anterior.

Ejemplo 3.1. *Dado el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 3y &= -2 \end{aligned}$$

partiendo de $\vec{x}_0 = \vec{0}$ calcular \vec{x}_1 con el algoritmo de esta sección y comparar su valor con la solución real.

Solución.

Usamos la notación empleada en el teorema:

$$\vec{f}_1 = (2, 1), \vec{x} = (x, y), b_1 = 3 \text{ y } \vec{f}_2 = (1, -3), \vec{x} = (x, y), b_2 = -2$$

Usamos las ecuaciones dadas en (3.4), tenemos

$$L_i(\vec{x}) = P_i(x) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \quad \text{con} \quad P_i(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{f}_i, \vec{x}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}$$

Entonces hallemos P_1, L_1, P_2 y L_2

Hallando P_1

$$\begin{aligned} P_1(\vec{x}) &= \vec{x} - (\vec{f}_1, \vec{x}) \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} \\ &= (x, y) - (2, 1) \bullet (x, y) \frac{(2, 1)}{\|(2, 1)\|^2} \\ &= (x, y) - \left(\frac{4x + 2y}{5}, \frac{2x + y}{5} \right) \\ &= \left(\frac{x - 2y}{5}, \frac{-2x + 4y}{5} \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$(3.5) \quad P_1(\vec{x}) = \left(\frac{x - 2y}{5}, \frac{-2x + 4y}{5} \right)$$

Hallando L_1

$$\begin{aligned} L_1(\vec{x}) &= P_1(x) + b_1 \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} \\ &= \left(\frac{x - 2y}{5}, \frac{-2x + 4y}{5} \right) + 3 \frac{(2, 1)}{\|(2, 1)\|^2} \\ &= \left(\frac{x - 2y}{5}, \frac{-2x + 4y}{5} \right) + 3 \frac{(2, 1)}{5} \\ &= \left(\frac{x - 2y + 6}{5}, \frac{-2x + 4y + 3}{5} \right). \end{aligned}$$

Luego,

$$(3.6) \quad L_1(\vec{x}) = \left(\frac{x - 2y + 6}{5}, \frac{-2x + 4y + 3}{5} \right)$$

Hallando P_2

$$\begin{aligned}
 P_2(\vec{x}) &= \vec{x} - \left(\vec{f}_2, \vec{x} \right) \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|^2} \\
 &= (x, y) - (1, -3) \bullet (x, y) \frac{(1, -3)}{\|(1, -3)\|^2} \\
 &= (x, y) - \left(\frac{x - 3y}{10}, \frac{-3x + 9y}{10} \right) \\
 &= \left(\frac{9x + 3y}{10}, \frac{3x + y}{10} \right).
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$(3.7) \quad P_2(\vec{x}) = \left(\frac{9x + 3y}{10}, \frac{3x + y}{10} \right)$$

Hallando L_2

$$\begin{aligned}
 L_2(\vec{x}) &= P_2(x) + b_2 \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|^2} \\
 &= \left(\frac{9x + 3y}{10}, \frac{3x + y}{10} \right) - 2 \frac{(1, -3)}{\|(1, -3)\|^2} \\
 &= \left(\frac{9x + 3y}{10}, \frac{3x + y}{10} \right) - 2 \frac{(1, -3)}{10} \\
 &= \left(\frac{9x + 3y - 2}{10}, \frac{3x + y + 6}{10} \right).
 \end{aligned}$$

Entonces

$$(3.8) \quad L_2(\vec{x}) = \left(\frac{9x + 3y - 2}{10}, \frac{3x + y + 6}{10} \right)$$

Luego, componenos L_2 con L_1

$$\begin{aligned}
 (L_2 \circ L_1)(x, y) &= L_2(L_1(x, y)) \\
 &= L_2\left(\frac{x - 2y + 6}{5}, \frac{-2x + 4y + 3}{5}\right) \\
 &= \left(\frac{3x - 6y + 53}{50}, \frac{x - 2y + 51}{50}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Si hallamos evaluamos esto último en $\vec{x} = \vec{0}$

$$(3.10) \quad \vec{x}_1 = (L_2 \circ L_1)(0, 0) = \frac{(53, 51)}{50} = (1.0600, 1.0200)$$

Finalmente si hallamos la solución real del sistema obtenemos $\vec{x}_{real} = (1, 1)$ comparando, observamos que el error no supera a 0.06 en cada variable.

□

Ejemplo 3.2. *Consideremos el sistema incompatible*

$$(3.11) \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 1 \\ x - y &= 0.001 \end{aligned}$$

Demostrar que $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots$ es una sucesión constante y comprobar que es una solución aproximada

Solución. Con un procedimiento similar al ejemplo anterior, obtenemos:

- Calculamos P_1 y L_1 .

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= \left(\frac{4x - 2y}{5}, \frac{-2x + y}{5} \right) \\ \text{y } L_1(x, y) &= \left(\frac{4x - 2y + 3}{5}, \frac{-2x + y + 6}{5} \right) \end{aligned}$$

- Calculamos P_2 y L_2 .

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= \left(\frac{x + 2y}{5}, \frac{2x + 4y}{5} \right) \\ \text{y } L_2(x, y) &= \left(\frac{x + 2y + 2}{5}, \frac{2x + 4y - 1}{5} \right) \end{aligned}$$

- Calculamos P_3 y L_3 .

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2} \right) \\ \text{y } L_3(x, y) &= \left(\frac{x + y + 0.001}{2}, \frac{x + y - 0.001}{2} \right) \end{aligned}$$

- Luego, si tomamos $\vec{x} = \vec{0}$ y calculamos $(L_3 \circ L_2 \circ L_1)(0, 0)$, obtenemos:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \vec{x}_1 &= (L_3 \circ L_2 \circ L_1)(\vec{0}) = (1.0001, 0.9999) \\ \vec{x}_2 &= (L_3 \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x}_1) = (1.0001, 0.9999) \\ \vec{x}_3 &= (L_3 \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x}_2) = (1.0001, 0.9999) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Finalmente verifiquemos que esta solución es una solución aproximada, para ello reemplazamos estos valores en el sistema (3.11).

$$(3.13) \quad \begin{aligned} 1.0001 + 2 * 0.9999 &= 2.9999 \approx 3 \\ 2 * 1.0001 - 0.9999 &= 1.0003 \approx 1 \\ 1.0001 - 0.9999 &= 0.0002 \approx 0.001 \end{aligned}$$

□

3.2. Método de Fourier

En esta sección nos ocuparemos de la base matemática de la tomografía en datos que tienen poca refracción y difracción. Mostraremos cómo se puede ir aproximadamente recobrando la imagen de la sección transversal de un objeto con los datos obtenidos de la proyección. En situaciones ideales, las proyecciones son un conjunto de medidas que se obtienen de las integrales de línea que resultan de integrar cierto parámetro a lo largo de líneas rectas a través del objeto. Mostraremos que la clave para imagen tomográfica es el (*Fourier Slice Theorem*) Teorema de las rebanadas de Fourier o teorema de las proyecciones, que relaciona los datos obtenidos de la proyección de la sección transversal del objeto con la transformada de Fourier en dos dimensiones.

En este capítulo se usará la definición de proyección paralela de un objeto, dada en la sección 1.3. Primero veremos cómo se puede reconstruir una función de densidad f conociendo solo sus proyecciones, para luego encontrar la transformada de Fourier de una proyección.

Veremos también cómo se deduce el *Fourier Slice Theorem*. El algoritmo de reconstitución usado depende del tipo de proyección usada al medir los datos. En este capítulo estudiaremos algoritmos basados en los datos de proyecciones paralelas de rayos X .

3.2.1. Método de la Transformada

La reconstrucción algebraica (modelo en expansión de series) vista en la sección anterior, a pesar de su sencillez, no es del todo satisfactoria en la práctica salvo en situaciones especiales [Kak] por su lentitud e imprecisión. Parte de esta imprecisión se debe a que desde el principio se discretiza (se digitaliza) mediante una malla que solo simula bien los cambios continuos en la densidad cuando el sistema lineal asociado tiene dimensiones muy grandes. Para evitar esta situación, vamos a partir directamente de un modelo continuo, sin modificar la idea original de representar con una función $f = f(x, y)$ la densidad (el tono de gris) en el punto (x, y) de la sección considerada. Por cierto, aunque no pidamos que f sea continua, el método de esta sección será más eficiente cuanto más regular sea f .

Teniendo presente nuestro problema, que es el de encontrar f conociendo $\mathcal{R}f$ (ver Secc. 2.2) i.e., obtenemos como planteamiento matemático del problema la ecuación (2.2).

$$(3.14) \quad \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_L f(x, y) dL$$

Donde f es la densidad del objeto.

Supongamos que atravesamos la muestra con un haz paralelo de rayos X que se proyectan ortogonalmente sobre una recta exterior que forma un ángulo θ con el eje OX como se ilustra en la figura 3.5.

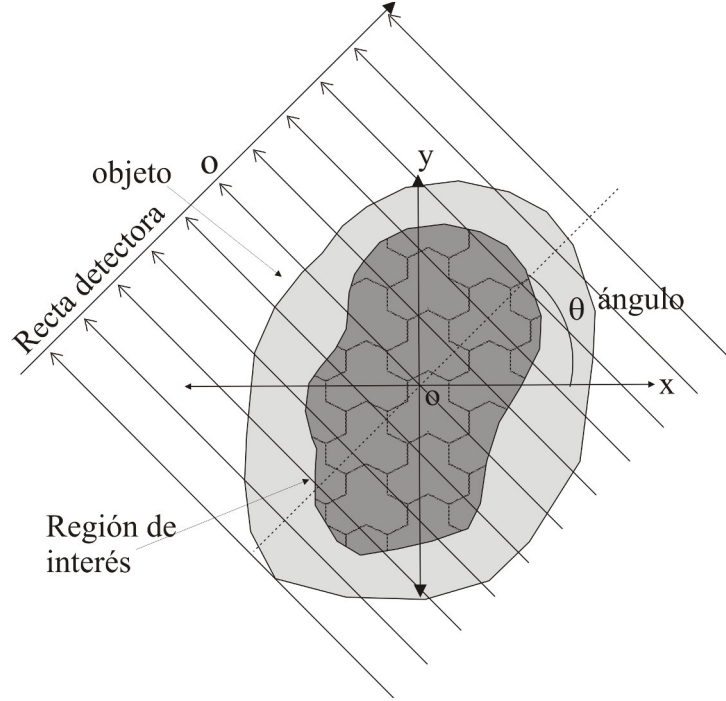


Figura 3.5: Muestra siendo atravesado por un haz de rayos X paralelos

Esta recta (recta detectora) se puede identificar con la recta real \mathbb{R} y situar el origen en el punto de intersección con el rayo que pasa por $(0, 0)$, y obtenemos un nuevo sistema de coordenadas el cual denotaremos por (s, u) . En la figura 3.6 mostramos los dos sistemas de coordenadas.

Por otro lado vamos a parametrizar un rayo que tenga una distancia s al origen de coordenadas y un ángulo θ , como en la figura 3.6, entonces obtendríamos que la recta $L_{(\theta, s)}$ está parametrizado por

$$(3.15) \quad \begin{cases} x = s \cos \theta - u \sin \theta \\ y = s \sin \theta + u \cos \theta \end{cases} ; \text{ para } u \in \mathbb{R}.$$

Con esta parametrización podemos reescribir la ecuación (3.14)

$$(3.16) \quad \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_L f(x, y) dL = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du$$

Ahora aprovechando la figura 3.6 definimos una rotación que la usaremos más adelante en la demostración del *Fourier Slice Theorem* $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que

lleva las coordenadas (s, u) en el sistema (x, y) definida como:

$$(3.17) \quad T : \begin{cases} x = s \cos \theta - u \sin \theta \\ y = s \sin \theta + u \cos \theta \end{cases}$$

Esta transformación es invertible y su inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está dada por:

$$(3.18) \quad T^{-1} : \begin{cases} s = x \cos \theta + y \sin \theta \\ u = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

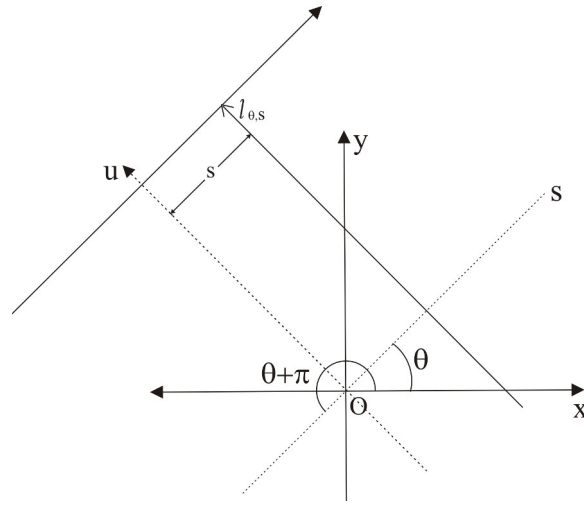


Figura 3.6: El rayo $L_{(\theta,s)}$ y los 2 sistemas

Como hemos visto en la sección anterior, la atenuación que ha experimentado el rayo cuando llega a s dependerá de la cantidad de masa que haya atravesado, es decir, la atenuación dependerá de la integral de línea, o la proyección paralela vista en la sección 1.2.

$$(3.19) \quad \mathcal{P}_\theta f(s) = \int_{L_{(\theta,s)}} f(x, y) dL$$

Luego, con la ecuación (3.19) y la parametrización de la ecuación (3.15) podemos escribir

$$(3.20) \quad \mathcal{P}_\theta f(s) = \int_{L_{(\theta,s)}} f(x, y) dL = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du$$

Notando que $L_{(\theta,s)}$ y $L_{(\theta+\pi,-s)}$ son rectas idénticas⁶ o simplemente imaginando la muestra rodeada de rectas detectoras con orientación compatible, se tiene $\mathcal{P}_\theta f(s) = \mathcal{P}_{\theta+\pi} f(-s)$.

⁶Simetría del haz $\Rightarrow L_{(\theta,s)} = L_{(\theta+\pi,-s)}$

Obs:

Recordando que el operador que asigna a una función escalar su integral de línea sobre cada recta es esencialmente lo que se llama transformada de Radon (ver la sección 1.2.), o por razones obvias, transformada de rayos X . Para cada θ , la función $\mathcal{P}_\theta f(s)$ indica la “sombra” de la muestra, que es translúcida a los rayos X , sobre una pared que forma ángulo θ con la horizontal.

En 1917 J. Radon halló una fórmula [Na] que permite recuperar la función original f a partir de todas sus sombras (proyecciones) $\mathcal{P}_\theta f(s)$. Sin embargo hubo que esperar unos 60 años para que se convirtiera en un tema fundamental de las *Matemáticas aplicadas*.

3.2.2. Solución Matemática

El problema matemático al que nos enfrentamos es hallar una función conociendo sus integrales de línea en todas las direcciones. Usando la notación anterior, lo que buscaremos es una fórmula, como la de Radon, que permita recuperar f a partir de las proyecciones $\mathcal{P}_\theta f(s)$. Hay varias fórmulas equivalentes con este propósito en [Na].

Aquí veremos una fórmula que es conocida en la literatura tomográfica como **Fourier Slice Theorem** (teorema de las rebanadas de Fourier).

El Theorem Slice Fourier

El Theorem Slice Fourier (Teorema de las rebanadas de Fourier) es la generalización de un hecho muy sencillo que ilustramos a continuación. La fórmula del theorem Slice Fourier se encuentra tomando la transformada de Fourier en una dimensión de una proyección paralela y notando que es igual a una slice (rebanada) de la transformada de Fourier en dos dimensiones del objeto original. Comenzamos definiendo la transformada de Fourier y su transformada inversa en una y en dos dimensiones de la función $f(\xi)$ y de $f(x, y)$ respectivamente:

Transformada de Fourier en una dimensión

$$(3.21) \quad \mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Transformada de Fourier en dos dimensiones

$$(3.22) \quad \mathcal{F}f(s, u) = \widehat{f}(s, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (sx + uy)} dx dy.$$

Transformada de Fourier inversa en una dimensión

$$(3.23) \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} dt.$$

Transformada de Fourier inversa en dos dimensiones

$$(3.24) \quad f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s, u) e^{2\pi i (sx+uy)} dx dy.$$

Luego, si consideramos $\theta = 0^\circ$ en la ecuación de la proyección (3.20), entonces $\mathcal{P}_0 f(s)$ no es más que la integral sobre la recta vertical $x = s$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos 0 - u \sin 0, s \sin 0 + u \cos 0) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s, u) du \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(3.25) \quad \mathcal{P}_0 f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, u) du$$

Por otro lado tomando la transformada de Fourier bidimensional en el caso particular usando $u = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{f}(s, 0) &= \mathcal{F}f(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (sx+0y)} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (sx)} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] e^{-2\pi i s x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_0 f(x) e^{-2\pi i s x} dx \\ &= \widehat{\mathcal{P}_0 f}(s) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(3.26) \quad \hat{f}(s, 0) = \widehat{\mathcal{P}_0 f}(s)$$

Es decir que la transformada de Fourier bidimensional de f evaluada en el eje X se puede hallar integrando f en la recta vertical $L_{(0,s)}$ y después calculando

la transformada de Fourier unidimensional de la función resultante, finalmente si queremos despejar f bastará tomar transformadas inversas.

Este hecho puede ser extendido al caso general de modo que $\widehat{f}(s, \theta)$ evaluada en una recta que forma un ángulo θ con el eje X y que pasa por el origen debe coincidir siempre con $\widehat{\mathcal{P}_\theta f}(s)$ y luego tomando transformadas inversas podemos despejar f .

Teorema 3.2. (Fourier Slice Theorem)

Sea $\mathcal{P}_\theta f(s)$ la integral de línea de f sobre la recta $L_{(\theta, s)}$ con la parametrización dada en la ecuación (3.15), entonces para f suficientemente regular se tiene

$$(3.27) \quad f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |r| \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr d\theta$$

Obs:

Lo de “suficientemente regular” es simplemente un requerimiento técnico para aplicar la fórmula de inversión. Con funciones de soporte compacto acotadas e integrables ya se tienen igualdades en casi todo punto, de modo que al menos desde el punto de vista teórico, no vamos a dejar de ver un tumor o cualquier cosa que tenga grosor porque f no sea C^∞ . Pero sí es cierto que en la práctica la falta de regularidad combinada con los métodos aproximados que se emplean, crea unas sombras inexistentes.

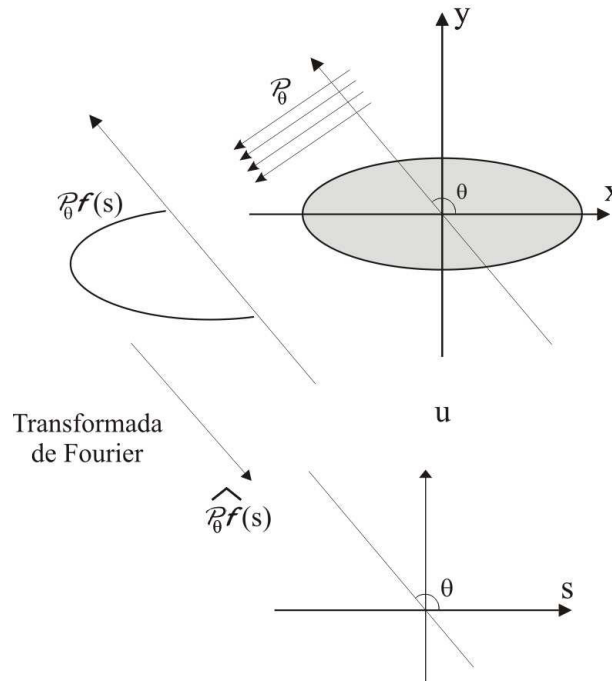


Figura 3.7: *El Theorem Slice Fourier [Q]*

La figura 3.7 ilustra el Theorem Slice Fourier: La Transformada de Fourier unidimensional de una proyección paralela formando un ángulo θ con el eje X es igual a los valores de la transformada bidimensional de un objeto a lo largo

de una línea recta que pasa por el origen, formando un mismo ángulo θ con el eje s .

Demostración.

- Primero veamos que $\widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) = \widehat{\mathcal{P}_{\theta+\pi} f}(-r)$, en efecto, con la ayuda de la figura 3.8 obtenemos que $(r, \theta) = (-r, \theta + \pi)$ como los puntos son iguales entonces y por la simetría del haz, las rectas en esos puntos son iguales i.e., $L_{(\theta,s)} = L_{(\theta+\pi,s)}$ entonces las correspondientes proyecciones serán iguales, entonces $\mathcal{P}_\theta f(r) = \mathcal{P}_{\theta+\pi} f(-r)$, luego si tomamos la transformada de Fourier tenemos $\widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) = \widehat{\mathcal{P}_{\theta+\pi} f}(-r)$ que era lo que estábamos buscando.

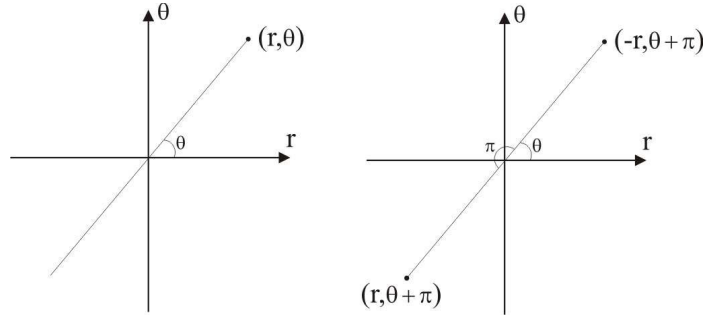


Figura 3.8: *Simetría del haz.*

- Si en la ecuación (3.27) separamos los límites de integración de menos infinito a cero y de cero a infinito y hacemos un cambio de variable en el primer término, obtenemos

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^0 r \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(-r) e^{2\pi i(x(-r) \cos \theta + y(-r) \sin \theta)} - dr \right] d\theta \\ + \int_0^\pi \left[\int_0^\infty r \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr \right] d\theta$$

cambiando los límites de integración en el primer termino

$$= \int_0^\pi \left[\int_0^\infty r \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(-r) e^{-2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr \right] d\theta \\ + \int_0^\pi \left[\int_0^\infty r \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr \right] d\theta$$

Usando el hecho que $\widehat{\mathcal{P}_\theta f}(-r) = \widehat{\mathcal{P}_{\theta+\pi} f}(r)$ y haciendo $\alpha = \theta + \pi$, tenemos

$$= \int_\pi^{2\pi} \left[\int_0^\infty r \widehat{\mathcal{P}_\alpha f}(r) e^{-2\pi i(-xr \cos \alpha - yr \sin \alpha)} dr \right] d\alpha \\ + \int_0^\pi \left[\int_0^\infty r \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr \right] d\theta$$

regresando a la variable θ y juntando las integrales, llegamos a:

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty r \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr \right] d\theta$$

Por todo,

$$(3.28) \quad f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr d\theta.$$

- Por otro lado, usando la inversión de la transformada de Fourier ecuación (3.24)

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(s, u) e^{2\pi i(sx + uy)} dx dy.$$

Hacemos el cambio de variables (s, u) a coordenadas polares $s = r \cos \theta$ y $u = r \sin \theta$; entonces obtenemos

$$(3.29) \quad f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dr d\theta.$$

Comparando las ecuaciones (3.28) y (3.29), entonces basta probar que

$$\widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) = \widehat{f}(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Para ello consideramos una rotación de ángulo θ alrededor del origen, y llegamos a la transformación dadas en (3.17).

$$T : \begin{cases} x = s \cos \theta - u \sin \theta \\ y = s \sin \theta + u \cos \theta \end{cases}$$

Por otro lado la ecuación (3.20), también podemos escribirla como composición de f con T

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\theta f(s) &= \int_{-\infty}^\infty f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(T(s, u)) du = \int_{-\infty}^\infty (f \circ T)(s, u) du \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(3.30) \quad \mathcal{P}_\theta f(s) = \int_{-\infty}^\infty (f \circ T)(s, u) du$$

- Luego, aplicando la definición de transformada de Fourier unidimensional a $\mathcal{P}_\theta f(r)$ y usando la ecuación (3.30) tenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) &= \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}_\theta f(s) e^{-2\pi i r s} ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (f \circ T)(s, u) du \right] e^{-2\pi i r s} ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (f \circ T)(s, u) e^{-2\pi i r s} du ds \end{aligned}$$

$$(3.31) \quad \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f \circ T)(s, u) e^{-2\pi i r s} du ds$$

- Finalmente vamos a hacer el cambio de variables dado en la ecuación (3.18) para la ecuación (3.31); el cambio está dado por

$$T^{-1} : \begin{cases} s = & x \cos \theta & + & y \sin \theta \\ u = & -x \sin \theta & + & y \cos \theta \end{cases}$$

como determinante del jacobiano $|J(s, u)| = 1$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f \circ T)(s, u) e^{-2\pi i r s} du ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f \circ T)(T^{-1}(x, y)) e^{-2\pi i r (x \cos \theta + y \sin \theta)} du ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (x(r \cos \theta) + y(r \sin \theta))} dy dx = \widehat{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(3.32) \quad \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) = \widehat{f}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Con lo que se concluye la demostración. \square

La ecuación (3.27) del teorema, es la ecuación principal del método de la retroproyección filtrada (*backprojected*). Este nombre surge de la interpretación que se le da, pues la ecuación (3.27) puede ser dividida en dos integrales, i.e.; se puede reescribir como:

$$(3.33) \quad f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

donde

$$(3.34) \quad Q_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |r| \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i r s} dr$$

La ecuación (3.34) es la transformada inversa de Fourier del producto de $|r| \mathcal{P}_\theta f(r)$; esta ecuación representa un filtrado de proyección, donde la frecuencia responsable del filtro es dado por $|r|$. (Tomado de [Kak]). $Q_\theta(s)$ es llamada proyección filtrada (*filtered projection*), este filtro es conocido como filtro rampa (está siendo representada en la figura 3.9), o filtro de *Ramachandran-Lakshminarayanan* o simplemente filtro de *Ram-Lak*.

El valor de un determinado punto de coordenadas (x, y) de la imagen original es dado por la sumatoria (o integral) de los diversos valores de $Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta)$ para varios valores de θ entre 0 a π . La figura 3.10, muestra el significado de la contribución de la proyección filtrada para cualquier Q_{θ_1} .

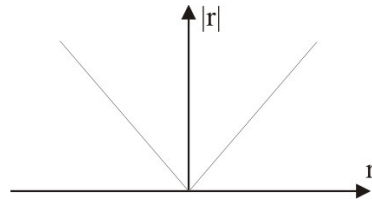


Figura 3.9: Filtro Rampa

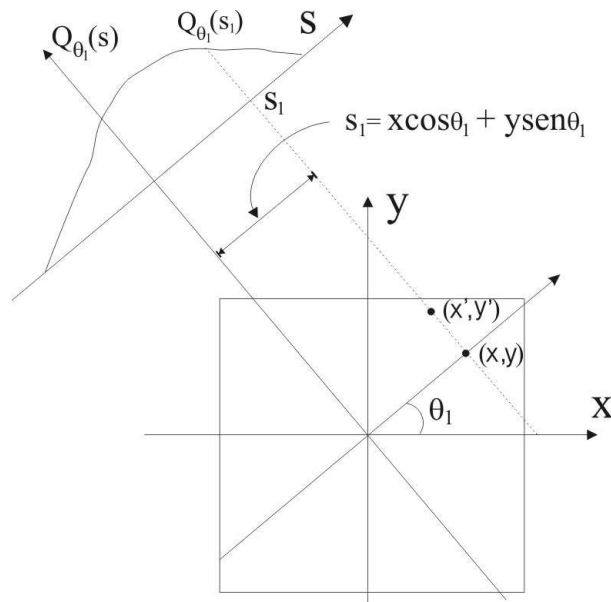


Figura 3.10: Retroproyección para la reconstrucción de una imagen

Para el ángulo θ_1 , el valor de la proyección filtrada $Q_{\theta_1}(s)$ que contribuirá para el valor final en el punto (x, y) es dado por la coordenada $s_1 = x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1$. Para el mismo ángulo θ_1 en el punto (x', y') , el valor de la coordenada en el eje s será el mismo: $s'_1 = x' \cos \theta_1 + y' \sin \theta_1 = s_1$.

Por consiguiente, la proyección filtrada $Q_{\theta_1}(s_1)$, hará la misma contribución para la reconstitución de todos estos puntos en la región de la imagen original, contribuyendo para todos los puntos a lo largo de la reta $s = s_1$. Todos los valores de $Q_{\theta_1}(s)$ son de esta manera retroproyectados en la región de la imagen original. Este proceso es realizado para todos los ángulos θ_i en que fueran adquiridas las proyecciones $\mathcal{P}_{\theta_i}f(s)$.

3.2.3. Tratamiento Computacional

Una vez conseguida una fórmula exacta que resuelve el problema matemático surge la pregunta: “¿y ahora cómo metemos esta fórmula en una computadora?”; entonces el trabajo aún no ha terminado. El método natural para tratar numéricamente expresiones que involucren integrales o series de Fourier es la transformada de Fourier discreta y la transformada de Fourier rápida (Ver A.3.4 del apéndice y para más detalle ver [Ta]) más conocida por sus siglas en inglés *FFT*. Este método, combinado con el desarrollo de las computadoras, ha revolucionado muchos métodos numéricos desde su introducción en los años 60.

Aquí mencionaremos algo más directo, que es una versión simplificada y clarificada de la sección 3.3.3 de [Kak].

De las ecuaciones (3.27) y (3.34) obtenemos:

$$(3.35) \quad f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

donde

$$(3.36) \quad Q_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |r| \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i r s} dr$$

De donde podemos ver que todo el problema se reduce a saber aproximar $Q_\theta(s)$, porque una vez hecho eso, podríamos usar nuestros apuntes de Matemática Computacional I (ver [Bu]) para aproximar integrales sobre el intervalo finito $[0, \pi]$ usando cualquier método (regla del trapecio, de Simpson, cuadratura de Gauss,...)

Entonces nuestro objetivo será el de aproximar la función $Q_\theta(s)$ para ello usamos las series de Fourier.

Desarrollemos la función $f(x) = |x|$ por series de Fourier en el intervalo $[-1/2, 1/2]$, para ello usamos las fórmulas⁷ dadas en la sección A.3.2 del

⁷son las fórmulas para calcular los coeficientes de la series de Fourier.

apéndice, para hallar a_0 , a_n y b_n , además teniendo en cuenta que $f(x) = |x|$ es una función par, por el teorema A.11 tenemos que $b_n = 0$, solo nos falta hallar a_0 y a_n

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| \cos(2 * 0 * \pi x) dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} x dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

hallemos a_n

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| \cos(2n\pi x) dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} x \cos(2n\pi x) dx \\ &= \frac{4}{4n^2\pi^2} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Luego, tenemos:

$$(3.37) \quad |x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\pi x)) \quad \text{con} \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$$

Recordando que

$$\cos(2n\pi x) = \frac{e^{2n\pi ix} + e^{-2n\pi ix}}{2}$$

Entonces la ecuación (3.37), se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{2n\pi ix} + e^{-2n\pi ix}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{2n\pi ix}) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-2n\pi ix}) \end{aligned}$$

Si tomamos $m = -n$, en la última sumatoria tenemos:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{2n\pi ix}) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{-1} a_{-m} (e^{2m\pi ix}) \\ (3.38) \quad &\text{si escribimos todo en términos de } n, \text{ tenemos:} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{2n\pi ix}) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{-n} (e^{2n\pi ix}) \end{aligned}$$

Definiendo:

$$(3.39) \quad \alpha_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{a_{-n}}{2} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

Se verifica que

$$(3.40) \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2}$$

Luego, usando la ecuación (3.40), la ecuación (3.2.3), se puede escribir como:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2n\pi ix} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{-n} e^{2n\pi ix} \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{2n\pi ix} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n e^{2n\pi ix} \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \alpha_n e^{2n\pi ix}. \end{aligned}$$

Si definimos $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, entonces tenemos

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{2n\pi ix}$$

Por lo tanto

$$(3.41) \quad |x| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{2n\pi ix}$$

Luego, si sustituimos $x = rh$ con $h \neq 0$ en la ecuación (3.41), resulta

$$(3.42) \quad |r| = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2n\pi irh}, \text{ con } \alpha_0 = \frac{1}{4} \text{ y } \alpha_n = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2}$$

Como $x \in [-1/2, 1/2]$ entonces $r \in I = [-1/2h, 1/2h]$, teniendo en cuenta que si h es muy pequeño, entonces I se parece a $(-\infty, \infty)$, entonces la ecuación (3.36), se cumple que

$$(3.43) \quad Q_\theta(s) \approx \int_I |r| \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i rs} dr$$

Luego, usando la ecuación (3.42) y la ecuación (3.43), obtenemos

$$\begin{aligned}
 Q_\theta(s) &\approx \int_I |r| \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i r s} dr \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_I \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i r s} (e^{2n\pi i r h}) dr \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_I \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i r s + 2n\pi i r h} dr \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_I \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i (s + nh) r} dr
 \end{aligned}$$

Si esta última integral lo extendemos a \mathbb{R} tenemos:

$$Q_\theta(s) \approx \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r) e^{2\pi i (s + nh) r} dr$$

Ahora esta última integral es la transformada inversa de $\widehat{\mathcal{P}_\theta f}(r)$, por lo tanto:

$$(3.44) \quad Q_\theta(s) \approx \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \mathcal{P}_\theta f(s + nh)$$

La ecuación (3.44) no tiene transformadas de Fourier, es simplemente una sumatoria y que de hecho es finita porque $\mathcal{P}_\theta f$ es de soporte compacto, pues la proyección ortogonal de un compacto es un compacto. [Ch], [Na], [Kak], [K], [Ta]

3.2.4. Ejemplo de Aplicación

Modelo de Shepp-Logan (“Head Phantom”)

El modelo de Shepp-Logan es presentado como un modelo básico para el análisis de la precisión de los métodos de reconstrucción presentados en esta sección.

Como citado por Slaney [Kak], el cerebro puede ser considerado como una de las imágenes que exigen más precisión, flexibilidad y complejidad de un algoritmo de reconstrucción. El modelo de un cerebro fue idealizado por **Shepp-Logan**, y es frecuentemente utilizado para comprobar la precisión de los algoritmos de reconstrucción. Este modelo está basado en un conjunto de 10 elipses.

El término “**phantom**” en Matlab, genera una imagen del espectro de la cabeza. Una ventaja de usar una imagen como la del modelo de Shepp-Logan

para simulaciones en computador es que se puede usar expresiones analíticas para la proyección usando transformada de Radon (Tomado de [Kak]). La proyección de la imagen compuesta por un número de elipses es simplemente la suma de las proyecciones de cada una de las elipses. Esto es debido a la linealidad de la transformada de Radon.

En esta parte usaremos las funciones internas de Matlab para generar una imagen patrón y luego trataremos de reconstruirla usando diferente número de proyecciones. Con el programa (B.1), generamos la imagen 3.11.



Figura 3.11: Imagen patrón de la cabeza.

Donde la imagen 3.11 consta de una elipse grande (representando el cerebro) conteniendo varias elipses más pequeñas (representando características en el cerebro).

Ahora vamos a reconstruir la imagen patrón y veamos la exactitud numérica de la reconstrucción, para ello usamos los algoritmos ya diseñados e implementados en matlab como **RADON** e **IRADON**⁸.

Con el programa (B.2) tomando 10 proyecciones para la reconstrucción, obtenemos la figura 3.12

Con el programa (B.2) tomando 50 proyecciones para la reconstrucción, obtenemos la figura 3.13

Con el programa (B.2) tomando 100 proyecciones para la reconstrucción, obtenemos la figura 3.14.

⁸Funciones internas de Matlab

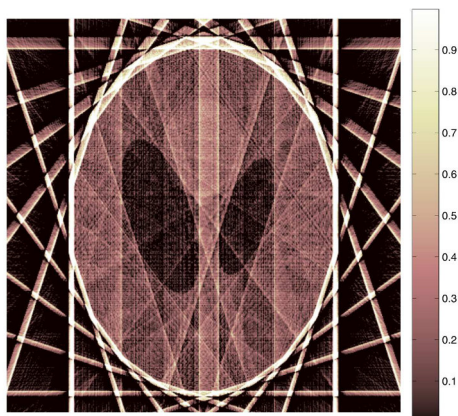


Figura 3.12: Reconstrucción de la imagen patrón con 10 proyecciones.

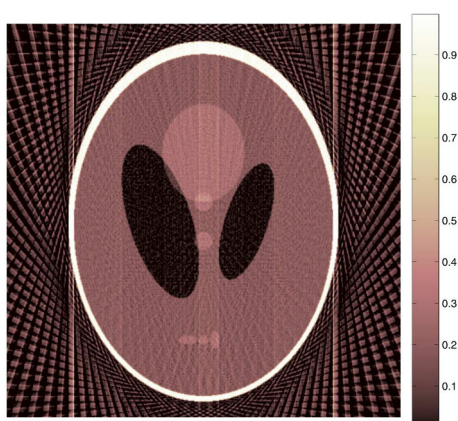


Figura 3.13: Reconstrucción de la imagen patrón con 50 proyecciones.

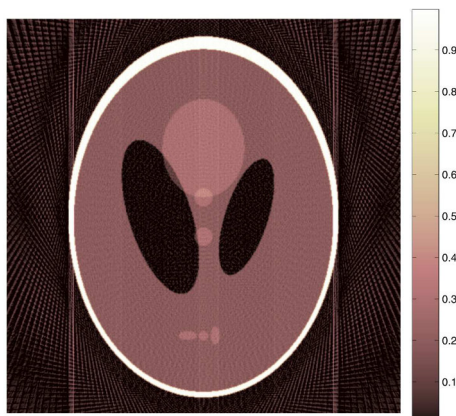


Figura 3.14: Reconstrucción de la imagen patrón con 100 proyecciones.

Con el programa (B.2) tomando 256 proyecciones para la reconstrucción, obtenemos la figura 3.15

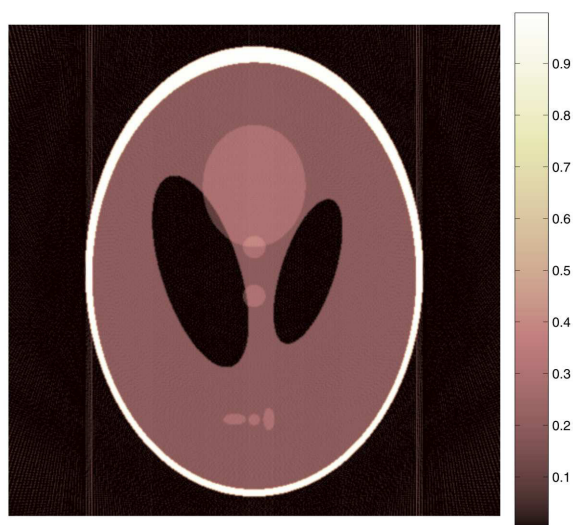


Figura 3.15: Reconstrucción de la imagen patrón con 256 proyecciones.

Capítulo 4

Simulaciones

4.1. Tomografía simulada

Objetivo:

Explicar las nociones básicas de uno de los métodos con los que se hacen tomografías y su relación con los algoritmos iterativos para resolver sistemas lineales.

Materiales:

- Cartulina.
- Plástico semitransparente (por ejemplo papel celofán).
- Una linterna.
- Una calculadora.

Experimento

Como es una verdad universal que los tejidos del cuerpo humano no se transparentan, entonces no podemos cambiar en las aplicaciones médicas los rayos X por la luz visible; lo que vamos a hacer aquí es sustituir los tejidos por unos cubitos translúcidos con los que podamos ilustrar la reconstrucción algebraica.

Con la cartulina fabricaremos nueve cubos y en sus caras laterales abriremos “ventanas” para que pueda pasar la luz, las cuales cubriremos algunos de ellos con el plástico semitransparente. Al poner tres cubos seguidos y enfocarlos con la luz de la linterna, se pueden detectar en una pantalla (una hoja de papel) cuatro posibles intensidades dependiendo de si ninguno, uno, dos o los tres cubos tienen plástico en sus ventanas, como se ilustra en la figura 4.1.

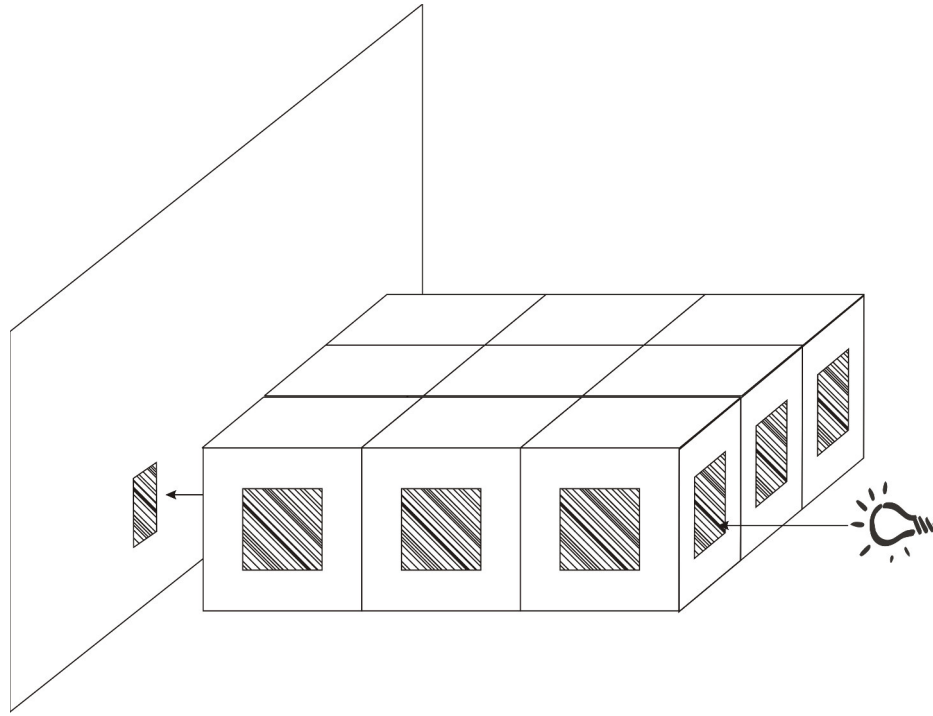


Figura 4.1: Los cubos siendo atravesados por la luz.

Convencionalmente designaremos estas intensidades por $I = 1; 1/2; 1/3; 1/4$ respectivamente. Para llevar a cabo el experimento, es importante familiarizarse con ellas de manera que podamos distinguirlas a simple vista. En otro caso, debemos cambiar el tipo de plástico.

Dispongamos los cubos formando un cuadrado, como se muestra en la figura 4.2, donde los cuadraditos pintados significan que son cubitos que tienen sus ventanas cubiertas con celofán.

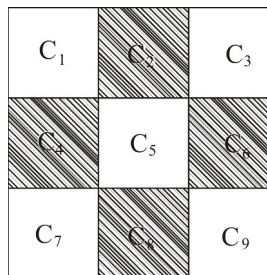


Figura 4.2: Formando un cuadrado con los cubos.

Usando el modelo físico que obedece la ley de Beer-Lambert, de acuerdo con la ecuación (2.1), tenemos

$$\frac{\Delta I}{I} = -f(x)\Delta x$$

Podemos reescribirla como

$$(4.1) \quad -\frac{I_f - I_i}{I_f} = f(x)\Delta x$$

Donde:

- * I_f : Es la intensidad final (al momento de la salida).
- * I_i : Es la intensidad inicial (al momento de la entrada).
- * $f(x)$: Es el coeficiente de densidad (lo que estamos por reconstruir).
- * Δx : Es la intersección del rayo con el cubo (en este caso será igual a 1).

Denotemos por C_j el coeficiente de densidad del j -ésimo cuadradito, entonces $f(x)$ puede ser reescrito como una sumatoria, además estamos asumiendo que $I_i = 1$, luego la ecuación (4.1), se transforma en

$$I_f^{-1} - 1 = \sum_{j=1}^3 C_j$$

Si hacemos pasar la luz de la linterna en cada una de las direcciones (horizontales, verticales y diagonales) como se muestra en la figura 4.3.

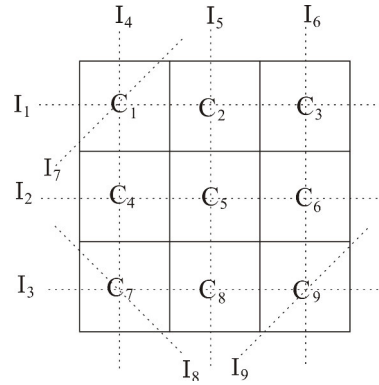


Figura 4.3: Forma en que los rayos de luz atraviesan el cuerpo.

Entonces luego obtenemos las siguientes ecuaciones

$$(4.2) \quad \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= I_{f_1}^{-1} - 1 \\ C_4 + C_5 + C_6 &= I_{f_2}^{-1} - 1 \\ C_7 + C_8 + C_9 &= I_{f_3}^{-1} - 1 \\ C_1 + C_4 + C_7 &= I_{f_4}^{-1} - 1 \\ C_2 + C_5 + C_8 &= I_{f_5}^{-1} - 1 \\ C_3 + C_6 + C_9 &= I_{f_6}^{-1} - 1 \\ C_1 &= I_{f_7}^{-1} - 1 \\ C_7 &= I_{f_8}^{-1} - 1 \\ C_9 &= I_{f_9}^{-1} - 1 \end{aligned}$$

Obteniendo así un conjunto de 9 ecuaciones con 9 incógnitas, supongamos que numeramos los cubos como en la figura 4.3 y asignamos al cubo j -ésimo el valor $C_j = 0$, si está hueco y $C_j = 1$, si es semitransparente. Luego, para esta ordenación (de los cubitos), obtenemos las siguientes intensidades finales

$$\vec{I} = (I_1, I_2, \dots, I_8, I_9) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right).$$

Luego, reemplazando estas intensidades en las ecuaciones de (4.2), obtenemos

$$(4.3) \quad \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ C_4 + C_5 + C_6 &= 2 \\ C_7 + C_8 + C_9 &= 1 \\ C_1 + C_4 + C_7 &= 1 \\ C_2 + C_5 + C_8 &= 2 \\ C_3 + C_6 + C_9 &= 1 \\ C_1 &= 0 \\ C_7 &= 0 \\ C_9 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos verificar que el sistema (4.3) es un sistema incompatible indeterminado, ya que si ponemos al sistema matricialmente, este tiene determinante 0. Entonces para conseguir un sistema determinado, añadimos una ecuación más que es la que pasa por la esquina de C_3 , entonces tendría una intensidad $I_{10} = 1$.

Evidentemente si en vez de nueve celdillas tuviéramos miles, sería muy costoso de comprobar si el sistema es determinado, y en la práctica simplemente añadiríamos más ecuaciones de las necesarias, pensando que habría que tener muy mala suerte para que todavía el rango de la matriz no fuera el adecuado.

El sistema se resuelve directamente haciendo los cálculos respectivos, y la solución es $\vec{C} = (C_1, \dots, C_9) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$. Pero como queremos ilustrar la reconstrucción algebraica, usaremos el algoritmo correspondiente

$$(4.4) \quad \vec{x}_{n+1} = (L_{10} \circ L_9 \circ \dots \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

partiendo de $\vec{x} = \vec{0}$. Donde L_i son las proyecciones en los hiperplanos que definen las ecuaciones de (4.3) y la añadida después (de hecho podríamos reemplazar una de las ecuaciones por ella). Con una calculadora y un poco de paciencia, se pueden hacer una o dos iteraciones. Usando programa (B.3)¹ se puede calcular con mucha más facilidad las iteraciones como por ejemplo, algunos de los \vec{x}_n obtenidos de esta forma son

¹Este programa se usa con $I_f = (I_1, I_2, \dots, I_9, I_{10}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1 \right)$.

$$\begin{aligned}
\vec{x}_5 &= (0, 0.7225, 0, 0.7225, 0.5549, 0.7225, 0, 0.7225, 0) \\
\vec{x}_{10} &= (0, 0.8460, 0, 0.8460, 0.3079, 0.8460, 0, 0.8460, 0) \\
\vec{x}_{15} &= (0, 0.9146, 0, 0.9146, 0.1709, 0.9146, 0, 0.9146, 0) \\
\vec{x}_{25} &= (0, 0.9737, 0, 0.9737, 0.0526, 0.9737, 0, 0.9737, 0) \\
\vec{x}_{50} &= (0, 0.9986, 0, 0.9986, 0.0028, 0.9986, 0, 0.9986, 0)
\end{aligned}$$

Nótese que la aproximación de \vec{x}_n a la solución hace posible adivinar enseguida dónde están los cubos semitransparentes ($C_i = 1$) y los huecos ($C_i = 0$). En el límite $\vec{x}_n \rightarrow \vec{C}$.

Si adicionalmente nos apetece mostrar una vista de la ubicación de los cubitos, con el programa (B.3), obtenemos la siguiente gráfica, si bien es cierto esta gráfica no nos da más información, pero se ve bonita.

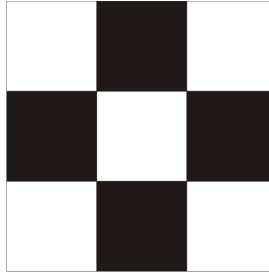


Figura 4.4: Grafica.

Adicionalmente hacemos más experimentos, teniendo presente el orden de los rayos como se muestra en la figura 4.5.

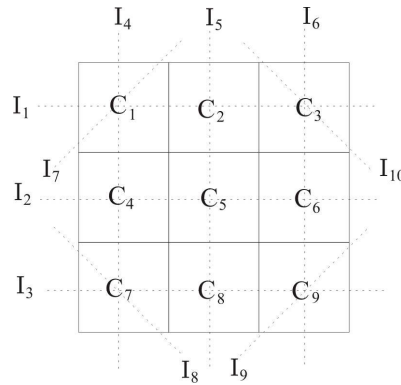


Figura 4.5: Orden en que son tomados los rayos.

Seguimos tomando $\vec{x} = \vec{0}$, y consideramos las distribuciones de los cubitos:

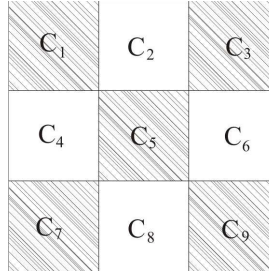


Figura 4.6: Distribución de los cubitos

- Si usamos la distribución que se muestra en la figura 4.6
Entonces las intensidades finales serán

$$I_f = (1/3, 1/2, 1/3, 1/3, 1/2, 1/3, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$$

luego usando el programa (B.3) obtenemos

$$\vec{x}_{50} = (1, 0.0263, 1, 0.0263, 0.9474, 0.0263, 1, 0.0263, 1)$$

Usando el programa (B.4) obtenemos

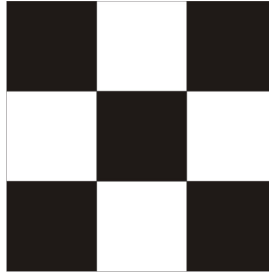


Figura 4.7: Gráfica.

- Le damos otra distribución a los cubitos, como la que se muestra en la figura 4.8.

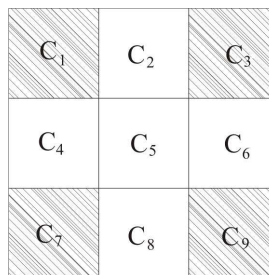


Figura 4.8: Distribución de los cubitos

Entonces las intensidades finales serán

$$I_f = (1/3, 1, 1/3, 1/3, 1, 1/3, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$$

luego usando el programa (B.3) obtenemos

$$\vec{x}_{25} = (1, 0.0132, 1, 0.0132, -0.0263, 0.0132, 1, 0.0132, 1)$$

Usando el programa (B.4) obtenemos

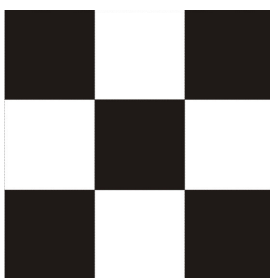


Figura 4.9: Gráfica.

4.2. Estructura interna de tubos

Objetivo:

Explicar las nociones de la fórmula de reconstrucción usando proyecciones.

Materiales:

- Una Calculadora programable o una computadora con un programa de cálculo.
- Un programa para dibujar gráficas.

Experimento

Como no contamos con una máquina de rayos X, para comprobar si verdaderamente podemos recuperar la función f usando la transformada de Radon, o usando las proyecciones $\mathcal{P}_\theta f$, vamos a considerar secciones muy particulares, con simetría radial, de las que nosotros mismos podemos hallar la proyección (algunos autores lo llaman sombra) manualmente. Para fijar el contexto en el que trabajamos, imaginemos que tenemos unos tubos con simetría radial acotados por $S^1(\mathbb{R})$ y queremos saber, sin romperlos, cómo es su estructura

interna; es decir, si los tubos son rellenos, si tienen una parte hueca, o si tienen un alma (zona central) de mayor densidad. Consideremos justamente tres tubos que respondan a estas características: Uno relleno de radio 1 y densidad 1, otro igual que el anterior pero con la zona central $0 \leq r \leq 1/2$ hueca, y un tercero con esta zona central rellena de un material de densidad 2. Como se muestra en la figura 4.10.

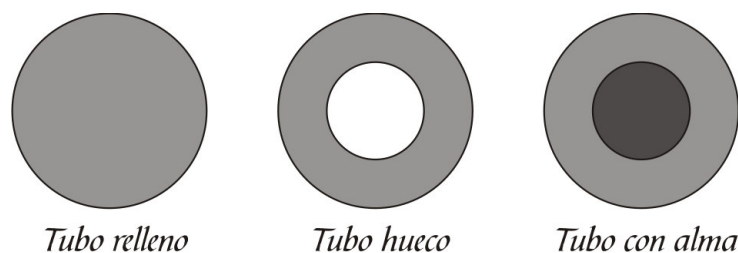


Figura 4.10: Tipos de tubos.

Los tubos nos facilitan hallar las proyecciones pues tienen simetría radial, entonces la función proyección (“sombra”) $S(t) = \mathcal{P}_\theta(t)$ no dependerá del ángulo θ y se puede calcular fácilmente.

Luego, esto es lo que podríamos haber deducido si hubiéramos podido hacer el experimento con rayos X:

Para el tubo relleno.

$$\mathcal{P}_\theta f(x) = S_1(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Para el tubo con interior hueco.

$$S_2(x) = S_1(x) - \frac{1}{2}S_1(2x)$$

Para el tubo con interior con parte central rellena de un material con mayor densidad.

$$S_3(x) = S_1(x) + \frac{1}{2}S_1(2x)$$

Si usamos el programa (B.5) obtenemos la gráficas de las funciones sombras (Ver figura 4.11).

El experimento consiste en que haciendo trabajar la calculadora o el computador, podremos recuperar la estructura del tubo a partir de la función S_i . Entonces para resolverlo, según lo visto en la sección 3.2.3, obtenemos que necesitamos aproximar las siguientes fórmulas:

$$(4.5) \quad f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

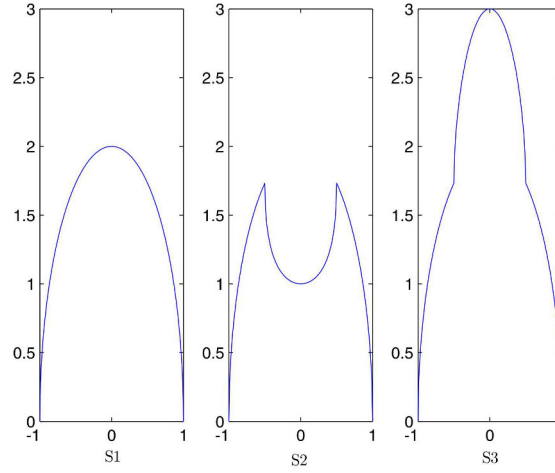


Figura 4.11: Gráficas de las funciones sombra

Donde

$$(4.6) \quad Q_{\theta}(s) \approx \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \mathcal{P}_{\theta} f(s + nh), \quad \text{con } \alpha_0 = \frac{1}{4} \text{ y } \alpha_n = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2}$$

La ecuación (4.5) se puede aproximar usando la regla del trapecio y resulta: [Bu]

$$(4.7) \quad f(x, y) \approx h \sum_{\theta_j} Q_{\theta_j}(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j)$$

Vamos a tomar proyecciones a lo largo del eje X , por lo tanto $y = 0$, luego la ecuación (4.7) se puede escribir como

$$\begin{aligned} f(x, 0) &\approx h \sum_{\theta_j} Q_{\theta_j}(x \cos \theta_j + 0 \cdot \sin \theta_j) \\ &= h \sum_{\theta_j} Q_{\theta_j}(x \cos \theta_j) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(4.8) \quad f(x, 0) \approx h \sum_{\theta_j} Q_{\theta_j}(x \cos \theta_j)$$

Donde los θ_j recorren $[0, \pi]$ de h en h , es decir, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = h$, $\theta_2 = 2h$, ...

Por otro lado teniendo en cuenta las simetrías $\alpha_n = \alpha_{-n}$ y de $S_i(-u) = S_i(u)$, para $i = 1, 2, 3$ se tiene que la ecuación (4.6), se transforma en

$$(4.9) \quad Q_{\theta_j}(s) \approx \frac{1}{h} \left(\alpha_0 \mathcal{P}_{\theta_j} f(s) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathcal{P}_{\theta_j} f(s + nh) \right)$$

Finalmente, puesto que en nuestro caso $\mathcal{P}_{\theta_j}f = S_i$, la ecuación (4.9), resulta

$$(4.10) \quad Q_{\theta_j}(s) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{S_i(s)}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n S_i(s + nh) \right)$$

De manera concreta, lo que tenemos que hacer es fijar una precisión h pequeña (aunque si lo es demasiado pequeña el programa demorará algunos minutos) y hacer un programa simple que permita calcular para cada coordenada radial R , las siguientes expresiones

$$(4.11) \quad f(R, 0) \approx h \sum_{\theta_j} Q_{\theta_j}(R \cos \theta_j)$$

$$(4.12) \quad Q_{\theta_j}(s) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{S_i(s)}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n S_i(s + nh) \right)$$

La exactitud que se logra al aproximar la densidad en $\|\vec{x}\| = R$ por $f(R, 0)$ es como se esperaba. Por ejemplo, tomando $h = 0.001$, se obtuvieron los siguientes resultados²:

Para el tubo 1

Usando el programa (B.6) obtuvimos ³.

Radio (R)	Valores aproximados	Valores exactos
0	1.0025	1
0.1000	1.0029	1
0.2000	1.0031	1
0.3000	1.0033	1
0.4000	1.0036	1
0.5000	1.0039	1
0.6000	1.0042	1
0.7000	1.0046	1
0.8000	1.0052	1
0.9000	1.0061	1
0.9900	1.0644	1

Como era de esperar, los errores mayores se producen cerca de las discontinuidades de la densidad. Y si queremos radializar estas gráficas podemos obtener superficies en \mathbb{R}^3 , (ver figura 4.12) que al igual que en el experimento anterior no nos dan más información que la que ya tenemos, pero se ve bonita.

²Se usó un programa en Matlab con precisión simple.

³Para este resultado el programa necesitó un tiempo de 14' 46" aproximadamente

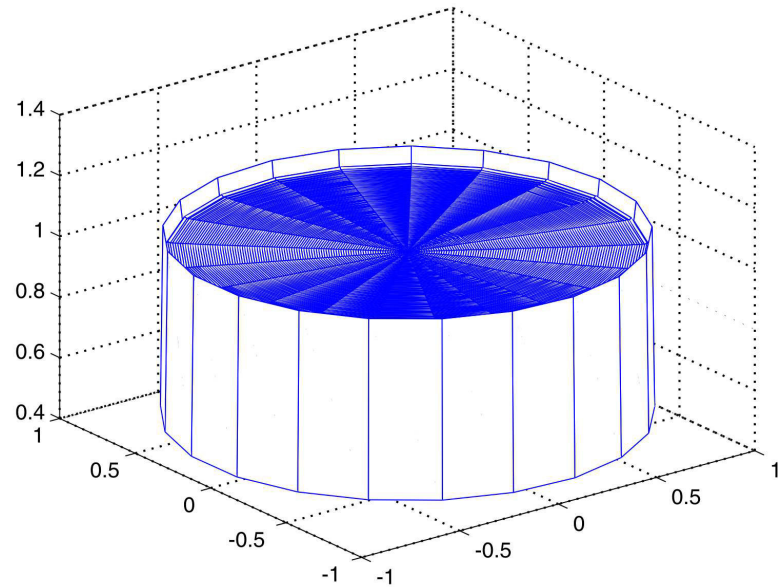


Figura 4.12: Reconstrucción del tubo 1.

Para el tubo 2

Usando el programa (B.7) obtuvimos ⁴.

Radio (R)	Valores aproximados	Valores exactos
0	0.0003	0
0.1000	-0.0002	0
0.2000	-0.0004	0
0.3000	-0.0007	0
0.4000	-0.0012	0
0.5000	0.5237	1
0.6000	1.0039	1
0.7000	1.0040	1
0.8000	1.0008	1
0.9000	1.0238	1
0.9900	1.0759	1

Como en el caso anterior, los errores mayores se producen cerca de las discontinuidades de la densidad. Y si queremos radializar esta gráfica podemos obtener superficies en \mathbb{R}^3 , (ver figura 4.13) que al igual que en el experimento anterior no nos dan más información que la que ya tenemos, pero se ve bonita.

⁴Para este resultado el programa necesitó un tiempo de 17' aproximadamente

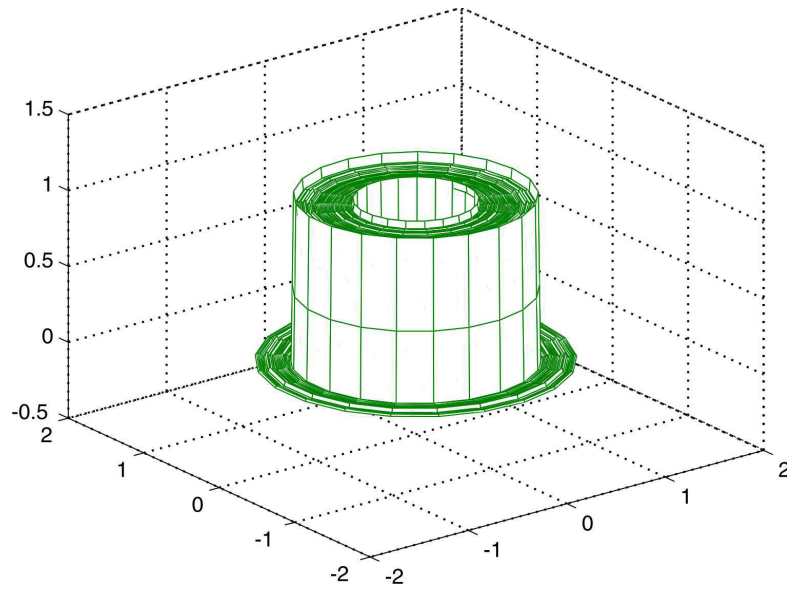


Figura 4.13: Reconstrucción del tubo 2.

Para el tubo 3

Usando el programa (B.8) obtuvimos ⁵.

Radio (R)	Valores aproximados	Valores exactos
0	2.0047	2
0.1000	2.0059	2
0.2000	2.0066	2
0.3000	2.0073	2
0.4000	2.0084	2
0.5000	1.4840	1
0.6000	1.0045	1
0.7000	1.0052	1
0.8000	1.0095	1
0.9000	0.9884	1
0.9900	1.0530	1

Al igual que en los casos anteriores, los errores mayores se producen cerca de las discontinuidades de la densidad. Y si queremos radializar esta gráfica podemos obtener superficies en \mathbb{R}^3 , (ver figura 4.13) que al igual que en el experimento anterior no nos dan más información que la que ya tenemos, pero se ve bonita.

⁵Para este resultado el programa necesitó un tiempo de 16' 51" aproximadamente

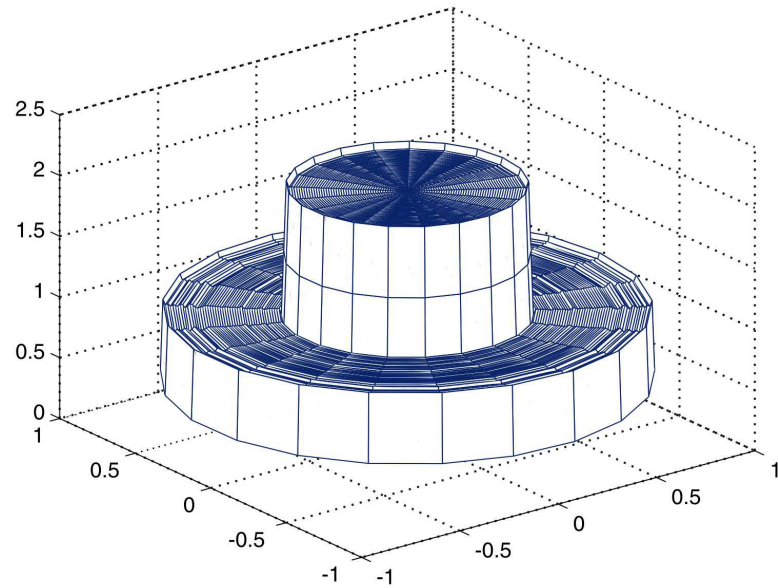


Figura 4.14: Reconstrucción del tubo 3.

4.3. Conclusiones y Observaciones

- Es posible reconstruir la estructura interna de los objetos, sin necesidad de abrirlos.
- Existen otras fórmulas de reconstrucción $y = \mathcal{K}x$
- Una variante sería tomar proyecciones en otra forma como por ejemplo en forma de abanico (ver figura 4.15):

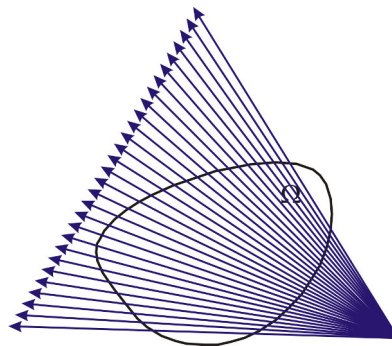


Figura 4.15: Proyección en forma de abanico.

Apéndice A

Resultados Básicos de Análisis Funcional

En este apéndice, recolectamos algunas definiciones básicas y algunos teoremas de análisis funcional. Recomendamos el libro [K],[Ru]

A.1. Funciones y Operadores en Espacios Normados

En esta parte mencionamos algunas definiciones y teoremas que usaremos.

Teorema A.1. (Teorema de la función abierta)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Banach, sea $\mathcal{K} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal y acotado de \mathcal{X} en \mathcal{Y} . Entonces \mathcal{K} es un operador abierto, i.e., las imágenes $\mathcal{K}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{Y}$ son conjuntos abiertos en \mathcal{Y} para todo subconjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ abierto en \mathcal{X}

En particular si \mathcal{K} es un isomorfismo definido de \mathcal{X} en \mathcal{Y} , entonces existe el operador $\mathcal{K}^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ inversa del operador \mathcal{K} . Este resultado es algunas veces llamado el teorema de Banach-Schauder.

Definición A.1. (Operador Contracción)

Un operador $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es llamado **contracción** en \mathcal{X} si existe un número real positivo $C < 1$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{X}$

$$(A.1) \quad \|T(x) - T(y)\| \leq C \|x - y\|, \quad C < 1$$

Geométricamente esto quiere decir que cualquier par de puntos x e y tienen imágenes que están más cercanas que estos x e y ; más precisamente, la razón que existe entre $\|T(x) - T(y)\| / \|x - y\|$ no exceden a una constante C que es estrictamente menor que 1.

Teorema A.2. (Teorema de Contracción o del punto fijo)

Consideremos \mathcal{X} un espacio normado completo, donde $\mathcal{X} \neq \emptyset$ supongamos también que $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es una contracción en \mathcal{X} . Entonces T tiene precisamente un punto fijo.

Corolario A.3. (Error en la iteración)

Con las mismas condiciones del teorema A.2 con un $x_0 \in \mathcal{X}$ arbitrario podemos construir una sucesión

$$(A.2) \quad x_0, \quad x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \quad \dots, \quad x_n = T^n(x_0), \quad \dots$$

la cual converge al único punto fijo x de T . Los errores estimados son

$$(A.3) \quad \|x_m - x\| \leq \frac{C^m}{1 - C} \|x_0 - x_1\|$$

y la estimación posterior

$$(A.4) \quad \|x_m - x\| \leq \frac{C}{1 - C} \|x_{m-1} - x_m\|$$

Teorema A.4. (La contracción en una bola)

Sea T el mapeo de un espacio normado \mathcal{X} sobre sí mismo. Supongamos que T es una contracción en una bola cerrada $Y = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$, y que T satisface la ecuación (A.1) para todo $x, y \in Y$. Además, asumimos que

$$(A.5) \quad \|x_0 - T(x_0)\| < (1 - C)r$$

Entonces la sucesión iterativa dada en la ecuación (A.2) converge para un $x \in Y$. Este x es llamado un punto fijo de T y este es el único punto fijo de T en Y .

Lema A.5. (Continuidad)

Una contracción T en un espacio normado es un operador continuo.

A.2. Operadores Acotados y Operadores Compactos

En esta sección \mathcal{X}, \mathcal{Y} representarán dos espacios normados y $\mathcal{K} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es un operador lineal.

Definición A.2. (Operador Acotado)

El operador lineal \mathcal{K} es llamado un operador acotado si existe $C > 0$; tal que

$$\|\mathcal{K}x\| \leq C \|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathcal{X}$$

La menor de todas estas constantes es llamada la norma de \mathcal{K} , i.e.,

$$(A.6) \quad \|\mathcal{K}\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathcal{K}x\|}{\|x\|}$$

Definición A.3.

Las siguientes aserciones son equivalentes:

1. \mathcal{K} está acotado.
2. \mathcal{K} es continuo en $x = 0$, i.e., $x_j \rightarrow 0$ implica que $\mathcal{K}x_j \rightarrow 0$.
3. \mathcal{K} es continuo para todo $x \in \mathcal{X}$

Definición A.4. (Operador Compacto)

Un operador $\mathcal{K} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es **compacto** si la clausura de $\mathcal{K}(B)$ es un subconjunto compacto de \mathcal{Y} , para todo subconjunto acotado B de \mathcal{X} .

Una definición equivalente viene dado en el siguiente teorema

Teorema A.6.

\mathcal{K} es **compacto** si y solo si para cada sucesión acotada (x_n) en \mathcal{X} tiene una subsucesión (x_{n_k}) tal que $(\mathcal{K}x_{n_k})$ converge en \mathcal{Y} .

Nota.

Observar que no pedimos que el rango de \mathcal{K} sea cerrado, por lo cual $\mathcal{K}(B)$ no necesita ser compacto aún si B es un conjunto cerrado y acotado. En análisis, uno de los espacios métricos más importantes es el conjunto de las funciones continuas $C_{[a,b]}$, para los subconjuntos de este espacio, un criterio importante y frecuentemente empleado de **compacidad relativa** lo ofrece el así llamado **Teorema de Ascoli**. Para poder enunciarlo necesitamos dar las siguientes definiciones.

Definición A.5. Una familia de funciones $\Phi = \varphi$, definidas sobre un intervalo I , se llama **equicontinua**, cuando para cada $\epsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \epsilon,$$

para todas las funciones $\varphi \in \Phi$ y $\forall x_1, x_2 \in I$, tal que $|x_1 - x_2| < \delta$.

Teorema A.7. (Teorema de Ascoli)

Una sucesión equicontinua acotada (x_n) en $C[a, b]$ posee una subsucesión convergente (en la norma de $C[a, b]$).

Teorema A.8.

Se cumplen las siguientes aserciones:

- Un operador compacto es acotado.
- La composición de un operador compacto y un operador acotado, en cualquier orden, es compacto.
- El límite uniforme de una sucesión de operadores compactos es compacto.
- Un operador acotado con un rango de dimensión finita es compacto.

Teorema A.9. (La compacidad de la esfera)

La esfera unitaria de un espacio normado \mathcal{X} es **compacta** si y solo si $\dim(\mathcal{X}) < \infty$

A.3. Análisis de Fourier

Vamos a recolectar algunos hechos elementales de la transformada de Fourier. Sea $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables en \mathbb{R}^n que tiene soporte compacto, esto es

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{existe } C > 0, \text{ tal que } f(x) = 0, \text{ si } |x| > C \}$$

A.3.1. El Espacio de Schwartz

Primero daremos una definición para los reales \mathbb{R} . El espacio de Schwartz \mathcal{S} es el conjunto de las funciones con derivadas de todo orden continuas y de decrecimiento rápido (es decir, que se anulan en el infinito más rápido que cualquier potencia de x^{-1}),

$$(A.7) \quad \varphi(x) \in \mathcal{S} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}), \\ |x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq K_{k,q} |\varphi| \quad \forall k, q \end{cases}$$

Nótese que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, resulta de la ecuación (A.7) que $x\varphi(x) \in \mathcal{S}$ y $\varphi'(x) \in \mathcal{S}$. Entonces, $\forall k, q$, $x^k \varphi^{(q)} \in \mathcal{S}$. Además podemos concluir que, $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$.

Para el caso n-dimensional \mathcal{S} es el espacio de todas las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para los cuales se cumple

$$(A.8) \quad |f|_{k,q} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^k D^q f(x)|$$

es finito para todos los multi-índices $k, l \in \mathbb{Z}_+^n$. Es decir que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables en \mathbb{R}^n que satisfacen

$$|x|^k |D_{x_1}^{q_1} D_{x_2}^{q_2} \dots D_{x_n}^{q_n}| < C_{k,q_1,q_2,\dots,q_n} \in \mathbb{N}$$

donde $|x|^k = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$

A.3.2. Series de Fourier

Definición A.6. (La Serie de Fourier)

Sea $f(x)$ una función arbitraria en $(-l, l)$. La serie trigonométrica infinita

$$(A.9) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

recibe el nombre de serie de Fourier para $f(x)$, y los coeficientes a_0 , a_n y b_n se determinan a través de la función $f(x)$ mediante las fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

En este caso, los coeficientes se conocen como coeficientes de Fourier para $f(x)$.

Nota 1:

En la práctica, el coeficiente a_0 debe calcularse de manera separada del resto de los coeficientes a_n , es decir:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

Nota 2:

En el cálculo de los coeficientes de Fourier aparecen las siguientes expresiones:

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad , \quad \sin(n\pi) = 0$$

A cada función $f(x)$ integrable en el intervalo $[-l, l]$ se le puede poner en correspondencia su serie de Fourier

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

Sin embargo, en general, esta correspondencia no corresponde con a igualdad. Para que así sea, la serie tiene que converger hacia la función.

El siguiente teorema da las condiciones suficientes para el desarrollo de una función en serie de Fourier.

Teorema A.10. (Teorema de Dirichlet)

Si una función periódica $f(x)$ de periodo $2l$ es monótona a trozos y acotada en el intervalo $[-l, l]$, entonces su serie de Fourier converge en cada punto x de este intervalo. Además para la suma

$$S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

de esta serie se cumplen las igualdades:

1. $S(x) = f(x)$ si x es un punto de continuidad de $f(x)$.
2. $S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si x es un punto de discontinuidad de $f(x)$.

Seguidamente vamos a ver el desarrollo de las funciones pares e impares en series de Fourier.

Definición A.7. (Función par y Función impar)

1. Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-l, l]$ se llama **par** si

$$f(-x) = f(x) \text{ para todos los } x \in [-l, l]$$

La gráfica de la función par es simétrica respecto al eje de ordenadas.

2. Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-l, l]$ se llama **impar** si

$$f(-x) = -f(x) \text{ para todos los } x \in [-l, l]$$

La gráfica de la función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Teorema A.11.

Los coeficientes de Fourier de una función par $f(x)$ se pueden obtener, de manera simplificada, mediante las siguientes fórmulas:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n = 0$$

Por consiguiente, la serie de Fourier de una función par contiene solo los cosenos, es decir, tiene la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Teorema A.12.

Los coeficientes de Fourier de una función impar $f(x)$ se pueden obtener, de manera simplificada, mediante las siguientes fórmulas:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Por consiguiente, la serie de Fourier de una función impar contiene solo los senos, es decir, tiene la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

A.3.3. La Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier en \mathbb{R}

Sea f una función integrable definida en \mathbb{R} . Su transformada de Fourier será la función definida también en \mathbb{R} , que la representaremos como $\mathcal{F}f$ o \widehat{f} , dada por

$$(A.10) \quad \mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

La definición varía según los gustos en la aparición de ciertas constantes: el exponente puede ser $-ix\xi$; en este caso, la fórmula de inversión ecuación (A.11) lleva un factor $1/2\pi$ multiplicando a la integral; para recuperar la simetría a veces se pone un factor $1/\sqrt{2\pi}$ en la definición de la transformada. Además, el exponente casi siempre lleva signo $-$, pero algunos autores usan signo $+$ (en este caso, el $-$ aparece en la fórmula de inversión).

Igual que las series de Fourier en el caso de funciones periódicas, la transformada de Fourier realiza una descomposición o *análisis* de f en componentes; ahora en lugar de presentar solo frecuencias discretas formando una sucesión, aparece un rango continuo de frecuencias (todo \mathbb{R}). A cada frecuencia ξ le corresponde un coeficiente $\widehat{f}(\xi)$, que será, en general, un número complejo; su módulo es la *amplitud* y su argumento es la *fase*. La reconstrucción de f a partir de \widehat{f} es la *síntesis*.

Proposición A.13. (Propiedades algebraicas de la transformada).

1. *Linealidad*: $(\alpha f + \beta g)^{\widehat{}} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$.
2. *Conjugación*: $(\widehat{\widehat{f}})(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$.
3. *Traslación*: si $\tau_h f(x) = f(x + h)$, entonces $(\tau_h f)^{\widehat{}}(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i h \xi}$.
4. *Modulación*: si $g(x) = f(x) e^{2\pi i h x}$, entonces $\widehat{g}(\xi) = (\tau_{-h} \widehat{f})(\xi)$.
5. *Dilatación*: si $g(x) = \lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x)$ y $\lambda > 0$, entonces $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda \xi)$.

La primera se deduce inmediatamente de la linealidad de la integral; la segunda, de las propiedades de la conjugación; para las demás hay que hacer los cambios de variable adecuados.

Proposición A.14. (Propiedades analíticas de la transformada).

1. \widehat{f} es una función (uniformemente) continua y $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.
2. Si f y f' son integrables, $(\widehat{f'})(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$.

3. Si $xf(x)$ es integrable, \widehat{f} es derivable y $(-2\pi i x f)^\wedge(\xi) = (\widehat{f})'(\xi)$.

4. Lema de Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

5. Si f y g son integrables, $\int f \widehat{g} = \int \widehat{f} g$.

Las propiedades segunda y tercera se pueden aplicar sucesivamente si se tienen más derivadas integrables de f o si $x^m f(x)$ es integrable. Esta última condición se cumple siempre si la función es de soporte compacto, y en este caso \widehat{f} es C^∞ . Incluso se tiene un resultado más fuerte.

Teorema A.15.

Si f es de soporte compacto, \widehat{f} es analítica¹. En consecuencia, si \widehat{f} se anula en todos los puntos de un intervalo es idénticamente nula.

Este resultado es una versión simplificada de un teorema más completo, llamado *teorema de Paley-Wiener*, que asegura que se puede definir \widehat{f} en una banda del plano complejo y que es una función analítica en esa banda.

Teorema A.16. (Teorema de inversión.)

Si f y \widehat{f} son integrables, entonces

$$(A.11) \quad f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x \xi} dx.$$

Además, el término de la derecha es una función continua en x , de modo que f coincide en casi todo punto con una función continua y se da la igualdad en los puntos de continuidad de f .

Observamos que el término de la derecha es la transformada de Fourier de \widehat{f} evaluada en $-x$; dicho de otro modo, $(\widehat{f})(x) = f(-x)$ en casi todo punto. Por tanto, aplicar cuatro veces sucesivas la transformada de Fourier produce una identidad.

La Transformada de Fourier en \mathbb{R}^n

La transformada de Fourier se define para funciones integrables de \mathbb{R}^n como la función en \mathbb{R}^n dada por

$$(A.12) \quad \mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Donde $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n$ es el producto interno canónico en el espacio euclidiano. Las propiedades dadas para una dimensión se mantienen

¹Se dice que una función es analítica si coincide con la suma de su serie de Taylor.

salvo con pequeños cambios, por ejemplo, la aparición de derivadas parciales en vez de ordinarias. También es válido el teorema de inversión A.16

Cuando $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$, la transformada de Fourier de f es el producto de las transformadas unidimensionales de f_1, \dots, f_n .

Existen varias definiciones; otra definición es comunmente usada para la *transformada de Fourier* $\mathcal{F}f = \hat{f}$ de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ en una clase apropiada, por ejemplo, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o simplemente \mathcal{S} es el espacio de Schwartz.

La transformada de Fourier es definida por la siguiente integral

$$(A.13) \quad \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,\xi)} dx, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Esta transformada también es inversible y la *transformada inversa de Fourier* está dada por

$$(A.14) \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi.$$

La Transformada de Fourier puede ser considerado como un operador lineal entre diversos espacios de funciones. La linealidad es de gran relevancia, pues los operadores considerados en este trabajo son lineales.

A.3.4. Transformadas de Fourier discreta y rápida.

Muchas veces en las aplicaciones nos encontramos con el problema de que las funciones de que se dispone no vienen dadas por expresiones analíticas sino por colecciones de datos (evaluaciones en determinados puntos) y por otra parte, las integrales que se necesitan también deben calcularse por procedimientos de aproximación. Todo ello ha hecho que en la práctica las definiciones dadas en la sección anterior sean sustituidos por la llamada *transformada discreta de Fourier* en la que las operaciones involucradas son sumas y multiplicaciones.

Otro problema que surge a menudo al usar transformadas de Fourier en la tecnología es el de calcularlas en tiempo real, pues poco sirve un instrumento cuyo costo (en tiempo o en dinero) supera las necesidades del usuario.

En este contexto se entiende el interés de lo que llamamos transformada rápida de Fourier, que no es una definición nueva o una variante de los anteriores sino un algoritmo de cálculo que permite reducir considerablemente el número de operaciones necesarias para calcular una transformada de Fourier discreta.

Transformada de Fourier discreta

Las funciones que vamos a considerar estarán definidas en el siguiente conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ y tomarán valores complejos. Esto significa que tenemos un elemento de \mathbb{C}^N , pero para que quede claro el aspecto funcional lo escribiremos como $f[k]$. Es conveniente considerar que el argumento de la función está definido módulo N , es decir, que en realidad tenemos una sucesión $\{f[k]\}$ definida para $k \in \mathbb{Z}$, periódica de periodo N , $f[k+N] = f[k]$ para todo k .

La transformada de Fourier discreta asocia a cada f otra “función” \hat{f} definida por

$$(A.15) \quad \hat{f}[k] = \sum_{j=0}^{N-1} f[j] e^{-2\pi i j k / N}$$

Como se puede observar que $\hat{f}[k+N] = \hat{f}[k]$, nuevamente podemos considerar que tenemos un elemento de \mathbb{C}^N o una sucesión periódica de periodo N , indistintamente.

Propiedades

1. La transformada de Fourier discreta es lineal.
2. Traslación en tiempo: Si $g[k] = f[k-n]$, entonces $\hat{g}[k] = \hat{f}[k] e^{-2\pi i k n / N}$.
3. Traslación en frecuencia: Si $g[k] = f[k] e^{2\pi i k n / N}$, entonces

$$\hat{g}[k] = \hat{f}[k-n].$$

4. Modulación: Si $g[k] = f[k] \cos(2\pi k n / N)$, entonces

$$\hat{g}[k] = \frac{1}{2} (\hat{f}[k-n] + \hat{f}[k+n]).$$

Sea $\omega = e^{-2\pi i / N}$; $\bar{\omega} = e^{2\pi i / N} = \omega^{-1}$ son raíces N -ésimas de la unidad al igual que sus potencias, es decir, $\omega^j = 1$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Además,

$$(A.16) \quad 1 + \omega^j + \omega^{2j} + \dots + \omega^{(N-1)j} = \begin{cases} N, & \text{si es múltiplo de } N \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La comprobación de este resultado se reduce a sumar una progresión geométrica. Con esta notación la transformación (A.15) se escribe

$$(A.17) \quad \hat{f}[k] = \sum_{j=0}^{N-1} f[j] \omega^{jk}.$$

Como transformación lineal de \mathbb{C}^N en \mathbb{C}^N , la transformada discreta de Fourier admite una representación matricial. Si f y \hat{f} son las matrices columna, cuyas entradas son los valores $\hat{f}[k]$ y $f[k]$, respectivamente, (A.15) se puede escribir matricialmente como

$$\hat{f} = A(\omega)f,$$

donde la matriz $A(\omega)$ viene dada

$$(A.18) \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \cdots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

(Algunos exponentes se pueden reducir utilizando que $\omega^{jN} = 1$, así como también, $\omega^{2(N-1)} = \omega^{N-2}$ y $\omega^{(N-1)(N-1)} = \omega$.)

Transformación inversa

Si $A(\bar{\omega})$ es la matriz (A.18) con $\bar{\omega}$ en vez de ω se tiene

$$A(\omega)A(\bar{\omega}) = A(\bar{\omega})A(\omega) = NI_N,$$

donde I_N es la matriz identidad. Si utilizamos (A.17) y el hecho que $\bar{\omega}\omega = 1$. Entonces

$$f = \frac{1}{N}A(\bar{\omega})\hat{f},$$

o sea,

$$(A.19) \quad f[k] = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}[j] \omega^{-jk} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}[j] \omega^{2\pi ijk/N},$$

que es la transformación inversa.

FFT (Transformada Rápida de Fourier)

El cálculo de una transformada de Fourier discreta requiere N^2 multiplicaciones. Si N es par se puede organizar el cálculo de modo que se realicen dos transformadas de Fourier discretas en $\mathbb{C}^{N/2}$ y una combinación adecuada de ellas. Esto reduce el número de multiplicaciones a aproximadamente la mitad. Se puede aplicar sucesivamente el mismo proceso y al final el número de multiplicaciones se reduce considerablemente. Ésta es la idea de la *transformada rápida de Fourier*.

Antes de situarnos en el caso general veremos el caso $N = 4$. Ahora $\omega = -i$ y la transformada es

$$\begin{pmatrix} \widehat{f}[0] \\ \widehat{f}[1] \\ \widehat{f}[2] \\ \widehat{f}[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{pmatrix}$$

Escribamos los elementos de la última matriz columna de modo que aparezcan primero los de variable par y después los de variable impar; esto exige cambiar el orden de las columnas de la matriz:

$$(A.20) \quad \begin{pmatrix} \widehat{f}[0] \\ \widehat{f}[1] \\ \widehat{f}[2] \\ \widehat{f}[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f[0] \\ f[2] \\ f[1] \\ f[3] \end{pmatrix}$$

Si dividimos la matriz resultante en cuatro matrices 2×2 observamos que las dos de la izquierda son iguales y corresponden a la matriz de la transformada discreta de Fourier en \mathbb{C}^2 y que las de la derecha resultan de multiplicar las filas de la izquierda por $1, -i, -1$ e i , respectivamente, que son $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ y ω^3 .

Definimos los elementos f_p y f_i de \mathbb{C}^2 siguientes:

$$f_p[0] = f[0], \quad f_p[1] = f[2],$$

$$f_i[0] = f[1], \quad f_i[1] = f[3].$$

A partir de (A.20) tenemos

$$\begin{pmatrix} \widehat{f}[0] \\ \widehat{f}[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p[0] \\ f_p[1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i[0] \\ f_i[1] \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \widehat{f}[2] \\ \widehat{f}[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p[0] \\ f_p[1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i[0] \\ f_i[1] \end{pmatrix}$$

Como se observa, la transformada de f se obtiene a partir de las de f_p y f_i . También podemos escribir el resultado del modo siguiente:

$$\widehat{f}[0] = \widehat{f}_p[0] + \widehat{f}_i[0]$$

$$\widehat{f}[1] = \widehat{f}_p[1] - i\widehat{f}_i[1]$$

$$\widehat{f}[2] = \widehat{f}_p[0] - \widehat{f}_i[0]$$

$$\widehat{f}[3] = \widehat{f}_p[1] + i\widehat{f}_i[1]$$

El caso general con N par funciona del mismo modo, solo la notación resulta más complicada. Escribiendo el vector columna de f con los términos que

corresponden a variable par delante de los de variable impar y reordenando adecuadamente las columnas de la matriz $A(\omega)$ de (A.18) tenemos

$$\begin{pmatrix} \widehat{f}[0] \\ \widehat{f}[1] \\ \dots \\ \widehat{f}[\frac{N}{2}-1] \\ \widehat{f}[\frac{N}{2}] \\ \widehat{f}[\frac{N}{2}+1] \\ \dots \\ \widehat{f}[N-1] \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} f[0] \\ f[2] \\ \dots \\ f[N-2] \\ f[1] \\ f[3] \\ \dots \\ f[N-1] \end{pmatrix}$$

donde la matriz $R(\omega)$ viene dada por

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-2} & \omega & \omega^3 & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-2} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)^2} & \omega^{\frac{N}{2}-1} & \omega^{3(\frac{N}{2}-1)} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)\frac{N}{2}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-2} & -\omega & -\omega^3 & \dots & -\omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-2} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)^2} & -\omega^{\frac{N}{2}-1} & -\omega^{3(\frac{N}{2}-1)} & \dots & -\omega^{(\frac{N}{2}-1)\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

Para escribir la matriz de esta forma hemos tenido en cuenta en su segunda mitad (filas $N/2$ a $N-1$) que $\omega^N = 1$ en las $N/2$ primeras columnas y que $N/2 = -1$ en las $N/2$ últimas. Como hemos hecho en el caso $N = 4$ dividimos la matriz en cuatro matrices $N/2 \times N/2$ y observamos que las dos de la izquierda son iguales y corresponden a la de la transformada de Fourier discreta en $\mathbb{C}^{N/2}$ y las de la derecha salen de multiplicar las filas de la izquierda por ω^k donde k es el orden de la fila.

Si definimos, como hacíamos en $N = 4$, dos elementos f_p y f_i en $\mathbb{C}^{N/2}$ por la regla

$$f_p[j] = f[2j], \quad f_i[j] = f[2j+1], \quad j = 0, 1, \dots, N/2-1,$$

deducimos que

$$\begin{aligned} f[j] &= \widehat{f}_p[j] + \omega^j \widehat{f}_i[j], \\ \widehat{f}[\frac{N}{2}+j] &= \widehat{f}_p[j] - \omega^j \widehat{f}_i[j], \end{aligned}$$

con $j = 0, 1, \dots, N/2-1$.

Si $N/2$ es par podemos aplicar el mismo argumento para reducir el cálculo de las transformadas en $\mathbb{C}^{N/2}$ a transformadas en $\mathbb{C}^{N/4}$ y así sucesivamente. El caso más favorable es aquél en que N es una potencia de 2, que acaba reduciendo el proceso a calcular $N/2$ transformadas en \mathbb{C}^2 y a combinarlas adecuadamente. Las sucesivas reordenaciones de los elementos según ocupen

lugar par o impar acaba en una distribución final que se puede relacionar con la escritura en base 2 de la variable. Existen algoritmos que permiten ordenar rápidamente los elementos en la forma conveniente para el cálculo.

El ahorro de operaciones que la transformada rápida de Fourier supone es considerable: se puede probar por inducción que las N^2 multiplicaciones de la situación inicial pasan a ser $2N \log 2N$. (Aquí están incluidas las multiplicaciones por 1, si se eliminan del cómputo queda solo la cuarta parte.)

El caso en que N no es una potencia de 2, se puede aplicar también un algoritmo de reducción, pero la ganancia no es tan considerable. Por ejemplo, si se factoriza $N = RC$, el cálculo se puede hacer con $N(R + C)$ multiplicaciones.

A.4. Delta de Dirac - Nociones Básicas

Consideremos la gráfica de la función $h_\epsilon(x - a)$ definida por la Fig. A.1.

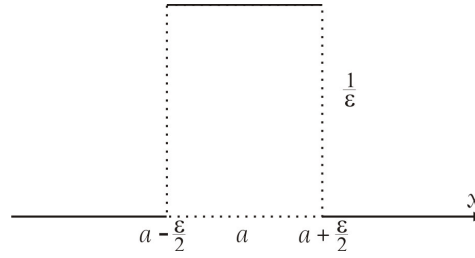


Figura A.1:

Donde $a \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$.

Formalmente, dado $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, la función definida por la Fig. A.1, está dada por:

$$h_\epsilon(x - a) : \begin{cases} 0 & \text{si } x < a - \frac{\epsilon}{2} \\ 1 & \text{si } a - \frac{\epsilon}{2} < x < a + \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

o bien, en término de la función Escalón de Heaviside (Ver figura A.2)

$$\mu(x - a) : \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

$$(A.21) \quad h_\epsilon(x - a) = \frac{1}{\epsilon} \left[\mu\left(x - a + \frac{\epsilon}{2}\right) - \mu\left(x - a - \frac{\epsilon}{2}\right) \right].$$

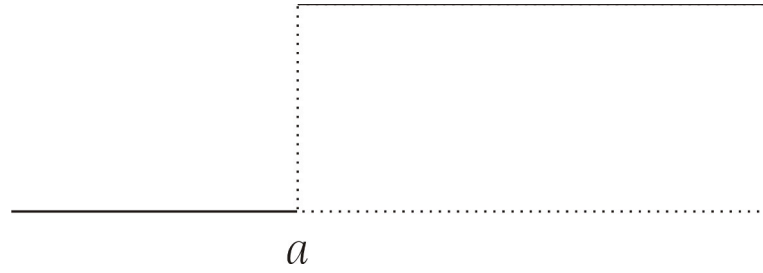


Figura A.2:

No es difícil verificar que para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{\epsilon}(x - a) dx &= \int_{a-\frac{\epsilon}{2}}^{a+\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{\epsilon} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es inmediato

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} h_{\epsilon}(x - a) dx = 1$$

La Fig. A.3, muestra gráficamente, el proceso al límite de la Fig. A.1.

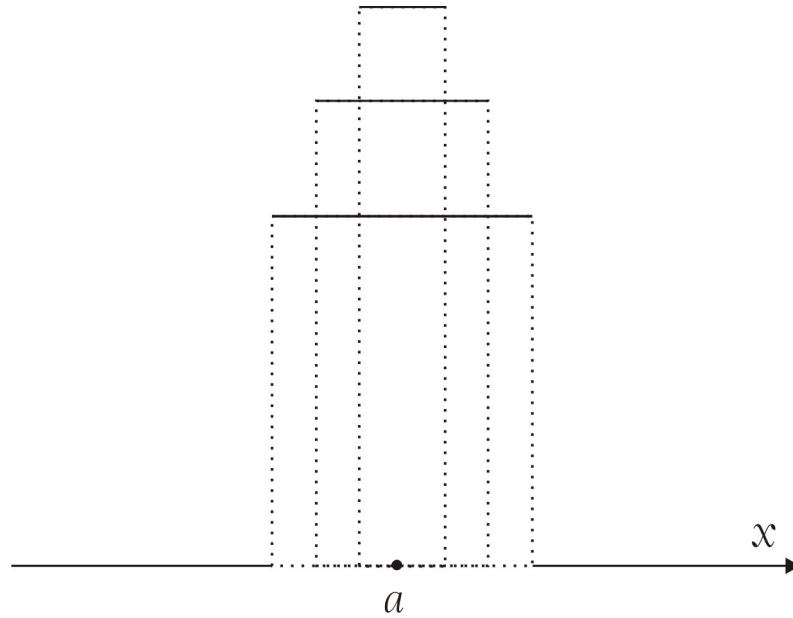


Figura A.3:

Donde estamos haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, $a \in \mathbb{R}$

El proceso anterior sugiere definir un paso al límite, preservando las dos propiedades siguientes:

$$(A.22) \quad \delta(x-a) : \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(x-a) dx & \end{cases}$$

La ecuación (A.22), es conocida como **Delta de Dirac**.

Comentario :

Nótese que el Delta de Dirac, !no es! una función en el sentido usual del Cálculo. Las dos propiedades de la definición en la ecuación (A.22), están en contradicción con los resultados del cálculo pues se sabe que una función idénticamente nula, excepto un punto, tiene siempre integral cero, en lugar de uno. Más exactamente, si $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq a, \quad a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^a f(x) dx}_0 + \underbrace{\int_a^{\infty} f(x) dx}_0 = 0$$

Lo anterior significa que no es posible aplicar los resultados del Cálculo, al Delta de Dirac, pues este no satisface la hipótesis básica de tratarse de una función en el sentido ordinario del Cálculo Integral.

En lo que sigue veremos un nuevo concepto, que explica en forma más clara que es realmente el Delta de Dirac.

Definición A.8. (Funciones de tendencia rápida a cero)

Una función φ , se llama de tendencia rápida a cero y escribiremos $\varphi \xrightarrow{rap} 0$, si es definida como, $\varphi : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^{∞} y tiene la propiedad:

$$(A.23) \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} \varphi^{(n)}(x)x^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Comentario :

El valor nulo del límite anterior significa que la función φ y todas sus derivadas tienen la propiedad de tender a cero más rápido que cualquier crecimiento de las potencia de x^n con $n \in \mathbb{N}$, cuando $|x|$ es muy grande. Geométricamente la propiedad significa que la gráfica de φ y las gráficas de todas las derivadas de φ , para $|x|$ muy grande se confunden con el eje X , ver Fig. A.4.

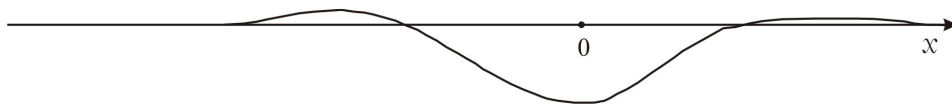


Figura A.4: Funciones de decrecimiento rápido

Comentario :

Las integrales impropias de las funciones, $\varphi \xrightarrow{rap} 0$ y en general de las funciones

derivadas $\varphi^{(n)} \xrightarrow{rap} 0$, $n \in \mathbb{N}$ siempre existen, pues para $K > 0$ suficientemente grande

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(\xi) d\xi = \int_K^K \varphi^{(n)}(\xi) d\xi$$

El conjunto $\Omega = \left\{ \varphi \mid \varphi \xrightarrow{rap} 0 \right\}$ con las leyes usuales para suma de funciones y multiplicación por escalares, es decir, con las operaciones para funciones de sumas de imágenes y multiplicación de imágenes por escalares, más exactamente:

$$(A.24) \quad \begin{cases} (\varphi + \phi)(\xi) &= \varphi(\xi) + \phi(\xi) \\ (\alpha\phi)(\xi) &= \alpha\phi(\xi) \end{cases}$$

es un espacio vectorial real, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi \in (-\infty, \infty)$. Geométricamente, podemos interpretar los vectores del espacio Ω como simples curvas y que corresponden a las gráficas de las funciones $\varphi^{(n)} \xrightarrow{rap} 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición A.9. Distribución

Cualquier aplicación Lineal

$$\begin{aligned} T : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow T(\varphi) \end{aligned}$$

se llama **distribución**.

Intuitivamente: una Distribución es simplemente una aplicación, que preserva la suma y multiplicación por escalar de Ω , y que a cada curva de Ω se le asocia un único escalar como imagen.

Observación:

Notar que por definición $\text{dom}(T) = \Omega$, es decir, el dominio de las distribuciones es el conjunto de las funciones φ tal que $\varphi \xrightarrow{rap} 0$, diferencia fundamental con las funciones, f , en el sentido del Cálculo Diferencial donde $\text{dom}(f) \subset \mathbb{R}$, o bien, en el caso de funciones de varias variables $\text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$.

Definición A.10.

Dos distribuciones $T_1, T_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son iguales si y solo si

$$\forall \varphi \in \Omega, \quad T_1(\varphi) = T_2(\varphi)$$

Nótese que la idea de igualdad para distribuciones es simplemente, la idea usual para funciones (se asocia a cada elemento en el dominio la misma imagen).

Definición A.11.

*Sea $a \in \mathbb{R}$. La aplicación **Delta de Dirac** es simplemente la distribución definida por:*

$$\begin{aligned} \delta_a : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \end{aligned}$$

Comentario :

Geométricamente, el Delta de Dirac δ_a , es la distribución que asocia, a cada curva $\varphi \in \Omega$ la segunda coordenada del punto $(a, \varphi(a))$ de la curva. Nótese que el Delta de Dirac no considera para nada la gráfica de la curva φ para puntos con abscisa $x \neq a$, ver Fig.A.5.

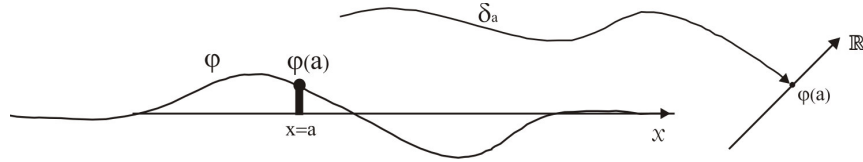


Figura A.5:

Sabemos que la distribución Delta de Dirac no es una función en el sentido ordinario del Cálculo. ¿Qué sentido tiene una integral que involucre un Delta de Dirac?. Para responder esta pregunta y usando la definición misma del Delta de Dirac tiene sentido definir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \varphi(x) dx := \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \quad \forall \varphi \in \Omega, \quad a \in \mathbb{R}$$

Observación:

1. Como δ_a , no es en el sentido usual del Cálculo, una función de una variable. La integral anterior, tampoco es una integral en el sentido ordinario del Cálculo Integral.
2. Nótese que por la definición anterior, el resultado de la integral es simplemente el único valor puntual que considera el Delta de Dirac, es decir, la imagen en el punto a de la función φ .

Con argumentos más avanzados se demuestra que la definición anterior se puede extender a funciones continuas y se tiene:

$$(A.25) \quad \text{si } f \in C^0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx := \delta_a(f) = f(a) \quad a \in \mathbb{R}$$

Apéndice B

Programas

B.1. Programas para la sección 3.2.4

Programa B.1.

Tipo: Matlab

Descripción: Permite generar una imagen patrón de la cabeza, con un color determinado por el comando pink.

```
%%% EL COMANDO PHANTOM GENERA UNA IMAGEN PATRÓN
X=phantom(512);
%%% GENERA UNA VENTANA DE FIGURA
imshow(X);
%%% GENERA EL COLOR EN LA IMAGEN
colormap(pink);
```

Programa B.2.

Tipo: Matlab

Descripción: Permite generar una imagen usando n proyecciones con un color determinado por el comando pink.

```
%%% RECONSTRUCCIÓN USANDO N PROYECCIONES
n=input('ingresa el número de proyecciones: n= ');
h=180/n;
theta=[0:h:180];
[R,a]=radon(X,theta);
%%% GENERA UNA VENTANA DE FIGURA
imshow(iradon(R,h))
%% GENERA EL COLOR EN LA IMAGEN CON LA BARRA DE COLORES %%%
```

```
colormap(pink); colorbar;
```

B.2. Programas para el capítulo 4

B.2.1. Programas para tomografía simulada

Programa B.3.

Tipo: Matlab

Descripción: Hace las iteraciones para mostrar la reconstrucción algebraica, se guardó con el nombre tomografía.m, se resalta el nombre pues el programa (B.4) hace uso de este programa, los datos de entrada son \vec{x}_0 y el número de iteraciones n , arroja como respuesta la iteración \vec{x}_n , para correrlo ingresamos $x = \text{zeros}(9,1)$ y el n deseado.

```
%% Cálculos del experimento "tomografía simulada"
If=input('Ingresa la intensidades finales If = ');
x=input('ingresa la aproximación inicial x=');
n=input('Da el número de iteraciones que se desea realizar n=');
i=1;
while i<=n
b=-ones(10,1)'+(If). ^(-1);
L1=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0]; x=x+(b(1)-L1*x)*L1'/(L1*L1');
L2=[0 0 0 1 1 1 0 0 0 0]; x=x+(b(2)-L2*x)*L2'/(L2*L2');
L3=[0 0 0 0 0 0 1 1 1 1]; x=x+(b(3)-L3*x)*L3'/(L3*L3');
L4=[1 0 0 1 0 0 1 0 0 0]; x=x+(b(4)-L4*x)*L4'/(L4*L4');
L5=[0 1 0 0 1 0 0 1 0 0]; x=x+(b(5)-L5*x)*L5'/(L5*L5');
L6=[0 0 1 0 0 1 0 0 1 0]; x=x+(b(6)-L6*x)*L6'/(L6*L6');
L7=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]; x=x+(b(7)-L7*x)*L7'/(L7*L7');
L8=[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]; x=x+(b(8)-L8*x)*L8'/(L8*L8');
L9=[0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]; x=x+(b(9)-L9*x)*L9'/(L9*L9');
L10=[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]; x=x+(b(10)-L10*x)*L10'/(L10*L10');
i=i+1;
end
fprintf('La aproximación es: % 10.5 f',x)
```

Programa B.4.

Tipo: Matlab

Descripción: Hace las gráficas de la forma en que están distribuídos los cubos,

usando la reconstrucción algebraica, usa el programa anterior.

```

%%%%%%%%%%%% INICIO %%%%%%%%%%%%%
%% RECONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA DE UNA MUESTRA
I=ones(256,256);
%% VALORES INICIALES
%% n=0;
%% x=zeros(9,1);
%% LLAMADA AL PROGRAMA ANTERIOR
tomografia
n=n+1;
%%%%%%%%%%%% DIBUJA %%%%%%%%%%%%%
Imag=[x(1)*I x(2)*I x(3)*I;...
x(4)*I x(5)*I x(6)*I;...
x(7)*I x(8)*I x(9)*I];
imshow(1-Imag)

```

B.2.2. Programas para la estructura interna de tubos

Programa B.5.

Tipo: Matlab

Descripción: Generar las gráficas de las sombras de las proyecciones de los tubos.

```

x=[-1:.01:1];
subplot(1,3,1), y1=2*sqrt(1-x.*x);
plot(x,y1), axis([-1 1 0 3])
subplot(1,3,2), y2=2*sqrt(1-x.*x)-sqrt(1-min(1,4*x.*x));
plot(x,y2), axis([-1 1 0 3])
subplot(1,3,3), y3=2*sqrt(1-x.*x)+sqrt(1-min(1,4*x.*x));
plot(x,y3)

```

Programa B.6.

Tipo: Matlab

Descripción: Da las aproximaciones para reconstruir la estructura interna del tubo 1 con su gráfica.

```

function M=ReconsTubo1
%%% Reconstruye la función usando el teorema Slice Fourier
%%% Creamos la función sombra con el nombre s1.m
fprintf('para los cálculos hechos usamos h=0.01 \n ');
h=input('ingresa la precisión ');
' Radio Aproximaciones'
M=[];
N=ceil(1/h);
%%% creamos la función en línea%%%%%%%%%
a=inline('((-1) ^ (n-1))/(2*(pi*n) ^ 2)','n');
for x=0:h:1,
% Regla del trapecio
aprox=0;
for t=0:h:3.141592654
suma=0;
for n=0:N
suma=suma+a(2*n+1)*s1(x*cos(t)+(2*n+1)*h);
end
F=(s1(x*cos(t))/4+2*suma)/h;
aprox=aprox+F;
end
M=[M;x,aprox*h];
end
% Genera el dibujo del tubo 1
[r,theta]=meshgrid(M(:,1),0:0.3:6.3);
[z,theta]=meshgrid(M(:,2),0:0.3:6.3);
mesh(r.*cos(theta),r.*sin(theta),z);
%%%%%%%%%%%% función%%%%%%%%%%%%
function y=s1(x);
if abs(x) >1;
y=0;
else
y=2*sqrt(1-x*x);
end

```

Programa B.7.

Tipo: Matlab

Descripción: Permite hacer las aproximaciones para la reconstrucción de la estructura interna del tubo 2, además genera la gráfica.

```

function M=ReconsTubo2
%% Reconstruye la función usando el teorema Slice Fourier
fprintf('para los cálculos hechos usamos h=0.01 \n');

```

```

h=input('ingresa la precisión ');
' Radio Aproximaciones'
M=[];
N=ceil(1/h);
%%%%%% creamos la función en línea%%%%%%%%
a=inline('((-1) ^ (n-1))/(2*(pi*n) ^ 2)','n');
for x=0:h:1
% Regla del trapecio
aprox=0;
for t=0:h:3.141592654
suma=0;
for n=0:N
suma=suma+a(2*n+1)*s2(x*cos(t)+(2*n+1)*h);
end
F=(s2(x*cos(t))/4+2*suma)/h;
aprox=aprox+F;
end
M=[M;x,aprox*h];
end
% Genera el dibujo del tubo 2
[r,theta]=meshgrid(M(:,1),0:0.3:6.3);
[z,theta]=meshgrid(M(:,2),0:0.3:6.3);
mesh(r.*cos(theta),r.*sin(theta),z);
end
%%%% Creamos la función sombra con el nombre s1.m
function y=s1(x);
if abs(x) >1;
y=0;
else
y=2*sqrt(1-x*x);
end
end
%%%% Creamos la función sombra s2 con el nombre s2.m
function yy=s2(x);
yy=s1(x)-0.5*s1(2*x);
end

```

Programa B.8.

Tipo: Matlab

Descripción: Permite hacer las aproximaciones para la reconstrucción de la estructura interna del tubo 3, además genera la gráfica.

```

function M=ReconsTubo3
%% Reconstruye la función usando el teorema Slice Fourier

```

```

fprintf('para los cálculos hechos usamos h=0.01 \n');
h=input('ingresa la precisión ');
' Radio Aproximaciones'
M=[];
N=ceil(1/h);
%%%% Creamos la función en línea%%%%%%%%
a=inline('((-1) ^ n-1)/(2*(pi*n) ^ 2)','n');
for x=0:h:1
% Regla del trapecio
aprox=0;
for t=0:h:3.141592654
suma=0;
for n=0:N
suma=suma+a(2*n+1)*s3(x*cos(t)+(2*n+1)*h);
end
F=(s3(x*cos(t))/4+2*suma)/h;
aprox=aprox+F;
end
M=[M;x,aprox*h];
end
% Genera el dibujo del tubo 3
[r,theta]=meshgrid(A(:,1),0:0.3:6.3);
[z,theta]=meshgrid(A(:,2),0:0.3:6.3);
mesh(r.*cos(theta),r.*sin(theta),z);
end
%%%% Creamos la función sombra con el nombre s1.m
function y=s1(x);
if abs(x) >1;
y=0;
else
y=2*sqrt(1-x*x);
end
end
%%%% Creamos la función sombra s3 con el nombre s2.m
function yy=s3(x);
yy=s1(x)+0.5*s1(2*x);
end

```

Apéndice C

Tabla de Notaciones

Tabla de Notaciones

Símbolo	Explicación	Referencia
B^k	Bola Unitaria de \mathbb{R}^k	42
C^0	Espacio de las funciones continuas C	79
C^∞	Espacio de funciones infinitamente diferenciables	79
C_0^∞	Espacio de funciones C^∞ con soporte compacto	8
\mathcal{F}	Transformada de Fourier	83
\mathcal{F}^{-1}	Transformada Inversa de Fourier	83
$\mathcal{N}(\mathcal{K})$	Espacio nulo del operador \mathcal{K}	28
\mathcal{K}	Operador	28
\mathcal{P}	Proyección de la radiografía paralela	18
\mathcal{R}	Transformada de Radon	27
\mathbb{R}	El cuerpo de los números reales	8
\mathbb{R}^n	El espacio n -dimensional	85
\mathcal{S}	El espacio de Schwartz de funciones	80
S^1	La esfera unitaria en \mathbb{R}^2	8
S^{n-1}	La esfera unitaria en \mathbb{R}^{n-1}	79
supp	Soporte	7
χ_X	función característica del conjunto X	12
$x \cdot y$	Producto interno	84

Bibliografía

- [Bu] Burden Faires. *Análisis numérico*.
- [Ca] Carbajal Efraín. *Problemas inversos y sus aplicaciones*. Serie A: Monografías, Colección de Matemáticos del Perú (1999)
- [Co] Cormack, A. M. *Autobiografía*. Acceso: nov. 2007. Disponible en: www.nobel.se/medicine/laureates/1979/cormackautobio.html
- [Cu] Curtis R. Vogel. *Computational Methods for Inverse problems*. Montana State University. Siam.
- [Ch] Chamizo Fernando. *Modelización II*. 2003.
- [Han] Hansen Chistian Per. *Rank-Deficient and Discrete Ill-posed Problems. Technical University of Denmark*. Siam - 1998.
- [Ho] Hounsfield, G. N. *Autobiografía*. Acceso: nov. 2007. Disponible en: www.nobel.se/medicine/laureates/1979/hounsfieldautobio.html
- [Hg] Hounsfield, G. N. *Computed medical imaging*. Acceso: nov. 2007. Disponible en: www.nobel.se/medicine/laureates/1979/hounsfieldlecture.html
- [Kak] Kak, A.C. Slaney, M. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. New York: I. Press. Versión electrónica Iam. 1998
- [Ka] Kirsch Andreas. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Texts in Applied Mathematics. Springer. (1996)
- [K] Kreyszig Erwin. *Introductory Funtional Analysis with applications*.
- [La] Lages Elon Lima. *Álgebra lineal*.
- [Na] Natterer, F. *The Mathematics of Computerized tomography*. (New York: Wiley - 2001)
- [Q] Quarin. *Tomografía por rayos X*. Acceso: nov. 2007. Disponible en: www.geocities.com/tomografiademadeira/autor2.html.
- [Ru] Rudin W. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York. 1973.
- [Ta] Taylor Michael E. *Partial Differential Equations I*. Texts in Applied Mathematics. Springer 1996.
- [W] What is tomography?. Acceso: nov. 2007. Disponible en: www.tomography.umist.ac.uk/whattom.html